INSTITUTO DE MATEMÁTICA DA UFBA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

MAT B33 – LIMITES E DERIVADAS

2008.2 - Prof[a]: Graça Luzia Dominguez Santos

1ª LISTA DE EXERCÍCIOS

01. Prove as identidades:

a) $1 - tgh^2x = sech^2x$ b) $1 - cotgh^2x = - cossech^2x$

02. Defina uma função inversa para y = *coshx*, para $x \leq 0$. Esboce o gráfico.

03. Sendo $f(x) = coshx$, mostre que $f\left(\ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)\right) = x$.

04. Esboce o gráfico de *f*, determine $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ e, caso exista, $\lim\limits_{x\to a} f(x)$:

a) $f(x) = \begin{cases} 3x - 2, & x > 1 \\ 2 \quad , & x = 1 \\ 4x + 1, & x < 1 \end{cases}$ $(a = 1)$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \geq 1\, e\, x \neq 2 \\ 1 \quad , & x = 2 \\ 1 - x, & x < 1 \end{cases}$ $(a = 2)$

c) $f(x) = \begin{cases} x^2 - x, & x \geq 0 \\ -x \quad , & x < 0 \end{cases}$ $(a = 0)$

d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x + 2}{|x + 2|}, & x \neq -2 \\ 0, & x = -2 \end{cases}$ (a = - 2)

05. Determine, se possível, $a \in$ R, para que exista $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)$, sendo:

a) $f(x) = \begin{cases} 3x - 2, & x > -1 \\ 3 \quad , & x = -1 \\ 5 - a\,x, & x < -1 \end{cases}$ $(x_o = -1)$

b) $f(x) = \begin{cases} (x^2 - 4)(x - 2)^{-1}, & x \neq 2 \\ a \quad , & x = 2 \end{cases}$ $(x_o = 2)$

06. Considere as funções do exercício 01. Verifique se *f* é contínua em $x = a$. Justifique.

07. Para cada função *f* a seguir, determine D(*f*) e, se possível, a função g: R → R, tal que g é contínua e *g(x) = f(x)*, para todo $x \in$ D(*f*):

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{3 - x}$

b) $f(x) = \begin{cases} 3x + 1, & x > -2 \\ -2x \quad , & x < -2 \end{cases}$

08. Prove, usando a definição, que a função é contínua no ponto dado.

a) $f(x) = 4x - 3$ em $a = 2$ b) $f(x) = -3x$, em $a = 1$

09. Suponha que $|f(x) - f(1)| \leq (x - 1)^2$ para todo *x*. Mostre que f é contínua em $x = 1$.

10. Calcule os limites a seguir,

a) $\lim\limits_{y\to -1} (-y^5 - 3y^4 + 12y^2)$ b) $\lim\limits_{w\to 10} (\log w - \ln w)$ c) $\lim\limits_{x\to 1} e^x(x^3 - 4)$

d) $\lim\limits_{x\to\pi/2} \dfrac{sen\,x}{1+cos\,x}$ e) $\lim\limits_{x\to 2} \left|\dfrac{x^2-4}{2-x}\right|$ f) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{|x-1|}$

g) $\lim\limits_{x\to 1/2} \dfrac{2x^2+3x-2}{8x^3-1}$ h) $\lim\limits_{x\to 2} e^{(x^4-16)(x^3-8)^{-1}}$ i) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

j) $\lim\limits_{y\to -1} \dfrac{1-y^2}{y+\sqrt{2+y}}$ k) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$ l) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x-4}}$

m) $\lim\limits_{x\to 8} \dfrac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8}$ n) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{3x+5}-2}{x^2-1}$

11. Determine, se possível, as constantes a, b e $c \in$ R, de modo que f seja contínua em x_0, sendo:

a) $f(x) = \begin{cases} bx^2+2, & x \neq 1 \\ b^2 \quad , & x = 1 \end{cases}$ $(x_0 = 1)$ b) $f(x) = \begin{cases} 3x-3 \quad , & x > -3 \\ ax \quad , & x = -3 \\ bx^2+1 \;, & x < -3 \end{cases}$ $(x_0 = -3)$

12. Esboce o gráfico de cada função f a seguir, e determine o que se pede:

a) $f(x) = \begin{cases} ln\,x, & x > 0 \\ e^x \;, & x \leq 0 \end{cases}$

- $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$, $\lim\limits_{x\to e} f(x)$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$
- intervalos onde f é contínua.

b) $f(x) = \begin{cases} (1/2)^x, & x > 0 \\ 1/x \quad , & x < 0 \end{cases}$

- $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

c) $f(x) = \begin{cases} log_{1/2}\,x, & x > 0 \\ 0 \quad , & x = 0 \\ x^{-2} \quad , & x < 0 \end{cases}$

- $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$
- estude a continuidade de f em $x = 0$.

d) $f(x) = \begin{cases} x^4 \quad , & x \leq 0 \\ \cot g\,x, & 0 < x < \pi \\ x+\pi\,, & x \geq \pi \end{cases}$

- $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to \pi/2} f(x)$, $\lim\limits_{x\to \pi^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to \pi^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$
- ponto(s) de descontinuidade de f.

13. Calcule:

a) $\lim\limits_{x\to +\infty} (2x^5+4x^2-3)$ b) $\lim\limits_{x\to -\infty} (4x^3-2x^2+x-5)$ c) $\lim\limits_{x\to -\infty} (-5e^x)$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{5x^2+x+2}$ e) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2-3x}+x)$ f) $\lim\limits_{x\to 0^+} (x^2+\ln x)$

g) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{1+2^{1/x}}$ h) $\lim\limits_{x\to 2^-} ln(2-x)$ i) $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{\pi}{2+3^{\frac{1}{x-1}}}$

14. Calcule os seguintes limites:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+1}{sen\,x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2}$ c) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{2x^2+3}{(x-5)^2}$

d) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{5x-4}{|x-2|}$ e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{cos\,3x}{x}$ f) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{3x-11}{|x|-3}$

g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{3}}{x^4}$

15. Calcule os limites a seguir:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2-4x-25}{18x^3-9x^2}$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} sen\dfrac{2+x-\pi x^2}{12x-4x^2}$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty} (1/\pi)^{x^3(x^2-1)^{-1}}$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} [x\ln 2-\ln(3^x+1)]$ e) $\lim\limits_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2-3x}+x)$ f) $\lim\limits_{x\to+\infty} [x(\sqrt{x^2-1}-x)]$

16. Calcule as constantes de modo que:

a) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-ax+b}{x-3}=5$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[ax-\dfrac{bx+3}{x+1}\right]=5$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$ e $\lim\limits_{x\to-2} f(x)=1$, sendo $f(x)=\dfrac{ax^3+bx^2+cx+d}{4(x^2+x-2)}$

d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{b\sqrt{x+3}-a}{x-1}=1/6$ e) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{2\sqrt{x^2+8}-b}{x+1}=-2/3$

f) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-ax+9}{x-3}, & x<-3 \\ bx, & x=-3 \\ 3x+1, & x>-3 \end{cases}$ seja contínua em $x_0=-3$

17. Considere a função $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3-x}{x^2-3x+2}, & x<2\ e\ x\neq 1 \\ -2, & x=1 \\ 10, & x=5 \\ x\ln|x-5|, & x\geq 2\ e\ x\neq 5 \end{cases}$. Justificando, estude a continuidade de *f*.

18. Calcule os seguintes limites:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{sen\,ax}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{tg\,ax}{bx}$, com $a,b\neq 0$ c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-cos\,x}{x^2}$ d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{tgx-sen\,x}{sen^2\,x}$

e) $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{sen\,x}{x-\pi}$ f) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{sen\,x-sen\,a}{x-a}$ g) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{cos\,x-cos\,a}{x-a}$.

19. Calcule os limites a seguir:

a) $\lim\limits_{x\to 0} [x\ sen(1/x)]$ b) $\lim\limits_{x\to -\infty} [e^x . sen\, x]$ c) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left[x^3(4-\cos x^{-2}) + \dfrac{e^x}{x} \right]$

d) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left[\dfrac{2+5x^3}{1-3x^7}\ \cos(\ln x) \right]$ e) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left[sen\left(\dfrac{x^2+x+1}{1+2x} \right) . \cos\left(\dfrac{\pi x^3+x^2-3}{2-x+2x^3} \right) \right]$

20. Seja f(x) = $x^5 + x + 1$. Justifique a afirmação: f tem pelo menos uma raiz no intervalo [-1,0].

21. Prove que a equação $x^3 - 4x + 2 = 0$ admite três raízes reais distintas.

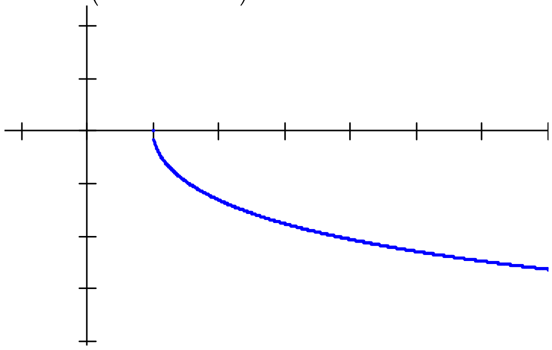
22. Calcule os limites:

a) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+5}$ b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{x}$ c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{x}{1+x}\right)^{x}$ d) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^{x}$ e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-1}{x}$

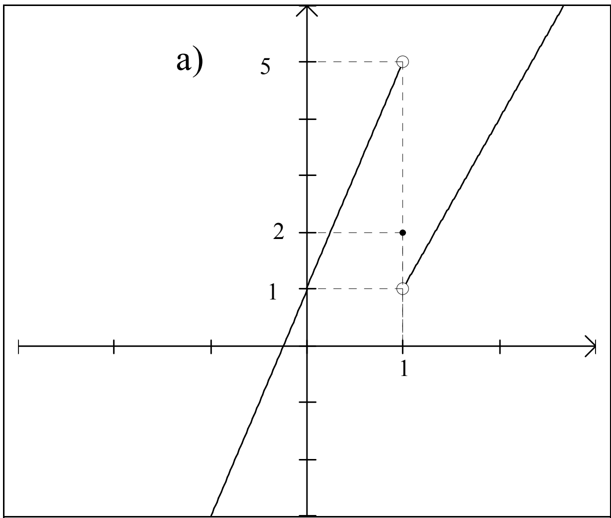
<u>RESPOSTAS DA 1ª LISTA</u>

02)

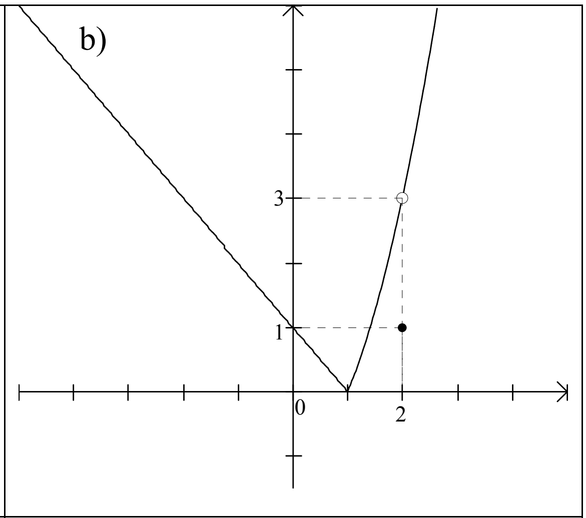
$y = \ln\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)$, x ≥ 1



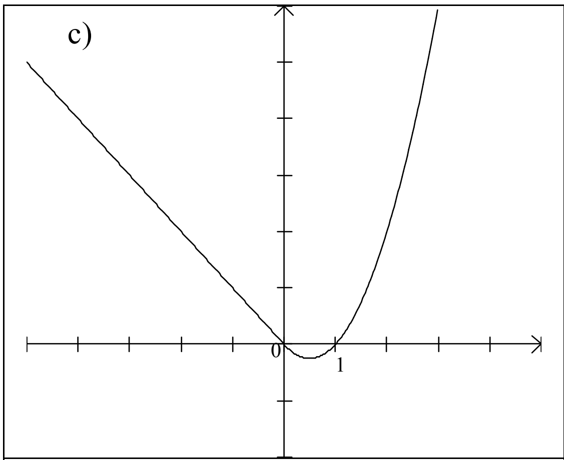
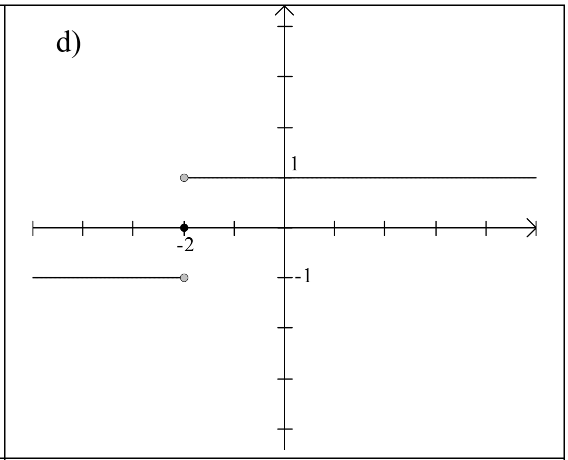
04)



$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 5,\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 1, \nexists \lim\limits_{x\to 1} f(x)$



$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} f(x) = 3$

c)	d)
	
$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$	$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -1,\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 1, \nexists \lim\limits_{x\to 2} f(x)$

05. a) -10; b) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ existe, independente do valor de *a*. Por isso *a* pode ser um número real qualquer.

06. a) Não é contínua em $x = 1$ pois não existe $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$;

b) Não é contínua em $x = 2$ pois $\lim\limits_{x\to 2} f(x) \neq f(2)$;

c) É contínua em zero pois $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$.

d) Não é contínua em $x = -2$ pois não existe $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$;

07. a) $D(f) = \mathrm{R} - \{3\}$ e $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-9}{3-x}, & x \neq 3 \\ -6, & x = 3 \end{cases}$;

b) $D(f) = \mathrm{R} - \{-2\}$, e não é possível definir $g(-2)$, tal que g seja contínua, pois não existe $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$;

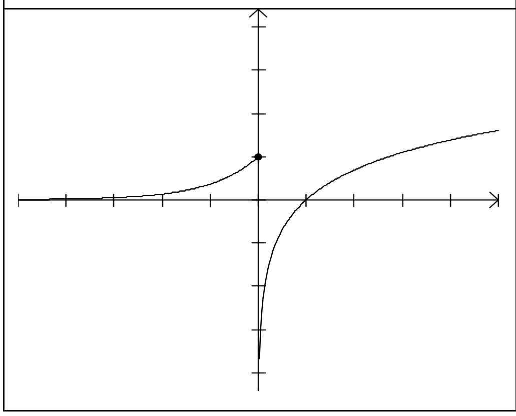
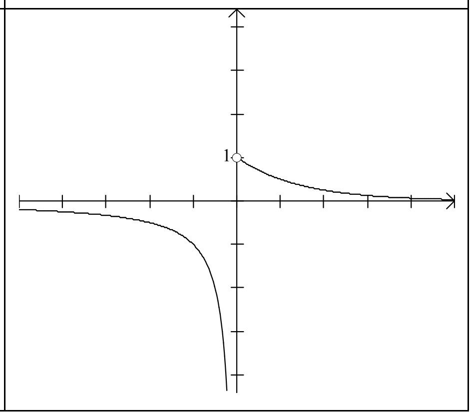
10. a) 10 b) 1- $\ln 10$ c) -3e d) 1 e) 4

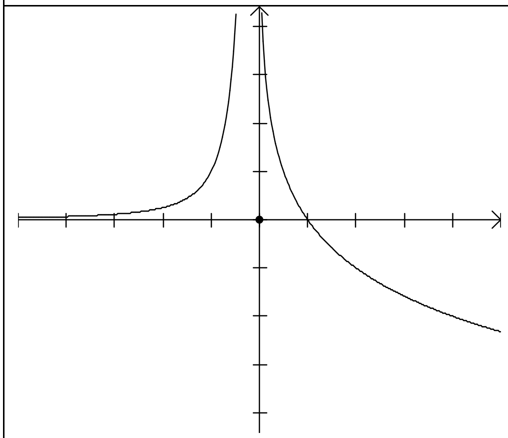
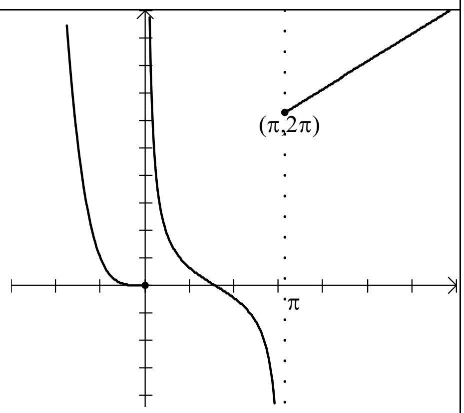
f) não existe pois $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^3-1}{|x-1|} = -3$ e $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^3-1}{|x-1|} = +3$ g) 5/6; h) $e^{8/3}$;

i) 1/2; j) 4/3; k) -1/3; l) 0; m) 1/12; n)1/8

11. a) b = -1 ou b = 2; b) a = 4 e b = -13/9

12.

a)	b)
	

0, 1, -∞, não existe, 0, 1/e, 1, +∞, (-∞,0), (0,+∞)	0, -∞, 1, não existe, 1/2, -1, 0
c)	d)
	
0, -∞, +∞, 0, não é contínua em zero porque $\lim\limits_{x\to 0} f(x) \neq f(0)$	+∞, 0, +∞, não existe, 0, -∞, 2π, +∞; $x = 0$ e $x = \pi$

13. a), d), e) $+\infty$ b), f), h) $-\infty$ c) 0 g) 1/2 i) $\pi/2$

14. a) Não existe pois $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x^2+1}{sen\, x} = -\infty$ e $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^2+1}{sen\, x} = +\infty$ b) $-\infty$ c) $+\infty$

    d) $+\infty$ e) Não existe pois $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\cos 3x}{x} = -\infty$ e $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\cos 3x}{x} = +\infty$

    f) Não existe, pois $\lim\limits_{x\to -3^-} \dfrac{3x-11}{|x|-3} = -\infty$ e $\lim\limits_{x\to -3^+} \dfrac{3x-11}{|x|-3} = +\infty$ g) $-\infty$

15. a),c) 0; b) $\sqrt{2}/2$; d) $-\infty$ e) 3/2 f) – ½

16. a) $a = 1$, $b = -6$; b) $a = 0$, $b = -5$; c) $a = 0$, $b = 12$, $c = 36$, $d = 24$

    d) $a = 4/3$, $b = 2/3$; e) $b = 6$; f) $a = 10$, $b = 8/3$.

17. f é contínua $\forall x \in IR - \{2, 5\}$;

18. a) a b) a/b c) 1/2 d) 0 e) –1 f) cos a g) – sen a.

19. a), b), d), e) zero; c) $+\infty$.

22. a) e b) e^2 c) 1/e d) e e) 2