INSTITUTO DE MATEMÁTICA - UFBA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
MAT B33- LIMITES E DERIVADAS - *Prof*[a]*: Graça Luzia Dominguez Santos*

3ª LISTA (QUESTÕES DE PROVAS)

Limites – Regra de L'Hospital.

1)Calcule os seguintes limites:

a) (1998 – 1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\operatorname{sen}\dfrac{\pi x}{2}-arctg(x)-\dfrac{1}{x}+\dfrac{\pi}{4}}{x^2+2x-3}$

b) (1998 – 1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2}{e^x-x-1}\right)$

c) (1998 – 1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln(\operatorname{sen}(x))}{(\pi-2x)^2}$

d) (1998 – 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{\operatorname{sen}^2 x}$

e) (1999 – 1) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{1-e^{-x}}-\dfrac{1}{x}\right)$

f) (1999 – 2) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\cot g(2x)\ \ arctg(x)\right)$

g) (1999 – 2) $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{1+x^2-2^x}{x^3-x^2-x+1}\right)$

h) (1998 – 1) $\lim\limits_{x\to 0^+}(\cos(x))^{\left(\frac{1}{x^2}\right)}$

i) (1998 – 1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^x$

j) (1998 – 1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(2^x+x)^{x^{-1}}$

k) (1998 – 1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(2+x^2)^{(x)^{-1/2}}$

l) (1999 – 1) $\lim\limits_{x\to 0}\left[tg\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\right]^{(1/x)}$

m) (1999 – 2) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\cos(2x)\right]^{3/x^2}$

n) (1999 – 2) $\lim\limits_{x\to 0^+}(x+\cos(2x))^{\operatorname{cossec}(3x)}$

o) (1999 – 2) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{1/2x}$.

p) (2005 – 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\dfrac{\pi}{2}-arctgx\right)$

q) (2005 -2) $\lim\limits_{x\to 0^+}(1+sen3x)^{(2/x)}$

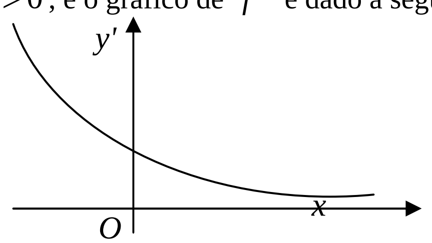
r) (2006 -1) $\lim\limits_{x\to 0^+}(\cot g(2x)arctg(x))$

Máximos e Mínimos

Com base na tabela seguinte e utilizando os conhecimentos sobre assíntotas, adquiridos durante o curso, resolva as questões **2, 3, 4, 5, 6 e 7.**

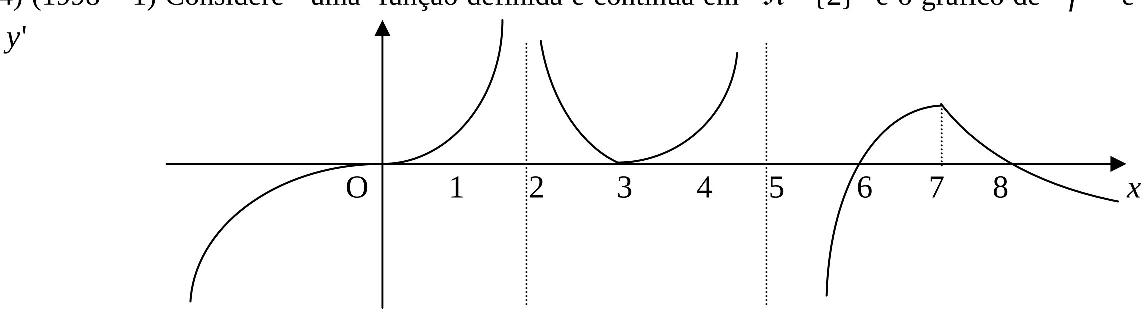
RELAÇÃO ENTRE AS CARACTERÍSTICAS GRÁFICAS DE UMA FUNÇÃO E AS DERIVADAS DE 1ª e 2ª ORDENS DESTA FUNÇÃO								
Características	PONTO CRÍTICO DE f	ABSCISSA DE MÁX. LOCAL DE $G(f)$	ABISCISSA DE MÍN. LOCAL DE $G(f)$	INTERVALO DE CRESCIMENTO	INTERVALO DE DESCRECIMENTO	INTERVALO ONDE $G(f)$ TEM C.V.C	INTERVALO ONDE $G(f)$ TEM C.V.B	ABISCISSA DE PONTO DE INFLEXÃO
1ª Derivada	x_o de $D(f)$ tal que $f'(x_o) = 0$ ou $\nexists\ f'(x)$	x_o é ponto crítico de f e o sinal de $f'(x)$ muda de + para – em x_o	x_o é ponto crítico de f e o sinal de $f'(x)$ muda de – para + em x_o	+	–	crescente	decrescente	f é contínua em x_1, x_1 é ponto crítico de f' e f' muda de crescimento em x_1
2ª Derivada	Não informa	Não informa	Não informa	Não informa	Não informa	+	–	$f''(x_2) = 0$ ou $\nexists\ f''(x_2)$ e f'' muda de sinal em x_2

2) (1999 – 2) Esboce o gráfico de uma função $y = f(x)$, $x \in \Re$, sabendo que ele tem para assíntota a reta $r: y = k$ quando $x \to +\infty$, sendo $k > 0$, e o gráfico de f' é dado a seguir:



3) (1999 – 2) Determine os pontos de inflexão do gráfico da função definida por $f(x) = x\,e^x$, $x \in \Re$.

4) (1998 – 1) Considere uma função definida e contínua em $\Re - \{2\}$ e o gráfico de f' é dado a seguir:



Determine:

4.1) os pontos críticos de f .

4.2) os intervalos de crescimento e decrescimento de f .

4.3) os pontos de máximo e de mínimo locais de f .

4.4) os intervalos onde o gráfico de f tem concavidade voltada para cima (CVC) e onde tem concavidade voltada para baixo (CVB).

4.5) as abscissas dos pontos de inflexão do gráfico de *f*.

4.6) o esboço de um gráfico de f, considerando $f(0)=2,\ f(3)=-1,\ f(5)=4,\ f(6)=1,\ f(7)=3$ e $f(8)=6$.

5) Para cada uma das funções dadas a seguir determine (se possível): o domínio de *f*, as interseções do gráfico de *f* com os eixos coordenados, as assíntotas ao gráfico de *f*, as interseções das assíntotas com o gráfico de *f* e com, os intervalos de crescimento e de decrescimento de *f*, os máximos e mínimos locais de *f*, os intervalos onde o gráfico tem concavidade voltada para cima e onde o gráfico tem concavidade voltada para baixo, os pontos de inflexão do gráfico de *f* e o esboço gráfico.

5.1)(1999 – 1) $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$, com $x\in\Re^*$.

5.2)(1998 – 2) $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2}$, sabendo que $f\,'(x)=\dfrac{2-x}{x^3}$ e $f\,''(x)=\dfrac{2\,(x-3)}{x^4}$.

5.3) (1998 – 1) $f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{x-1}$, sabendo que $f\,'(x)=\dfrac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$ e $f\,''(x)=\dfrac{4}{(x-1)^3}$.

5.4) (1998 – 1) $f(x)=x\,e^{-3x}$, sabendo que $f\,'(x)=e^{-3x}(1-3x)$ e $f\,''(x)=e^{-3x}(9x-6)$.

5.5) (1999 – 1) $f(x)=\dfrac{2x^2}{x^2+1}$, sabendo que $f\,'(x)=\dfrac{4x}{(x^2+1)^2}$ e $f\,''(x)=\dfrac{4\,(1-3x^2)}{(x^2+1)^3}$.

5.6) (1998 – 1) $f(x)=\dfrac{x^3-4}{x^2}$, sabendo que $f\,'(x)=\dfrac{x^3+8}{x^3}$ e $f\,''(x)=-\dfrac{24}{x^4}$.

5.7) (2006- 1) $f(x)=\dfrac{x^2}{3-x}$, sabendo que $f'(x)=\dfrac{6x-x^2}{(3-x)^2}$ e $f''(x)=\dfrac{18}{(3-x)^3}$.

6) Determine as constantes a e b de modo que

6.1) (1998 – 1) o gráfico da função $f(x)=x^3+ax^2+bx$ tenha máximo relativo no ponto $P(1,9)$.

6.2) (1998 – 1) o gráfico da função $f(x)=x^3+ax^2+bx+1$ tenha ponto de inflexão $P(2,1)$.

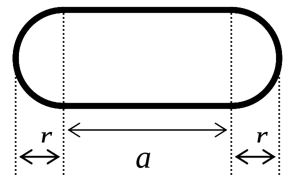
6.3) (1998 – 1) a função $f(x)=x^3+ax^2+bx$ tenha um extremo em $x=2$ e o gráfico de f tenha ponto de inflexão de abscissa $x=\dfrac{3}{2}$.

7. Resolva os seguintes problemas:

7.1) (1999 – 2) O custo de produção de x unidades de um certo produto é dado, em reais, por $y = 3x^2 + 5x + 75$. Encontre o valor mínimo do custo médio por unidade produzida. (Sabe – se que o custo médio por unidade produzida é dado por $C = \frac{y}{x}$).

7.2) (1999 – 2) O preço de uma certa ação na bolsa de valores, em função do tempo t decorrido após sua compra por um investidor é dado por $P(t) = \frac{160t}{(4+t)^2} + 1$ (t em anos e $P(t)$ em reais). Para vendê-la, o investidor tem que esperar no mínimo 2 anos e no máximo 5 anos. Dê a melhor ocasião para venda.

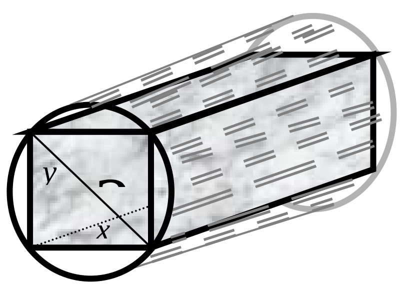
7.3) (1998 – 1) Uma pista de atletismo com comprimento total de 400m, consiste de dois semicírculos e um retângulo conforme figura ao lado . Determine as dimensões de a e r de tal maneira que a área retangular demarcada na figura seja máxima.



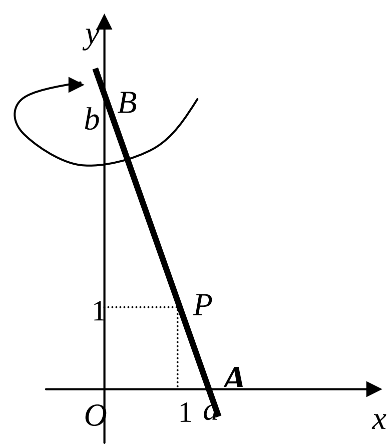
7.4) (1999 – 1) Determine as dimensões de uma caixa retangular de base quadrada, sem tampa, de forma que sua área total tenha 48 cm^2 e seu volume seja o maior possível.

7.5) (1999 – 2) Um cilindro circular reto é gerado pela rotação de um retângulo de 30cm de perímetro em torno da reta determinada pelos pontos médios de dois lados opostos desse retângulo. Que dimensões o mesmo deve ter para gerar o cilindro de volume máximo?

7.6) (1999 – 1) A resistência de uma viga é diretamente proporcional ao produto da largura pelo quadrado da altura da seção transversal ($R = \alpha\, x\, y^2$, sendo α a constante de proporcionalidade, x a largura e y a altura). Determine as dimensões da viga mais resistente que pode ser cortada de um toro cilíndrico de raio a.
(Ver figura)



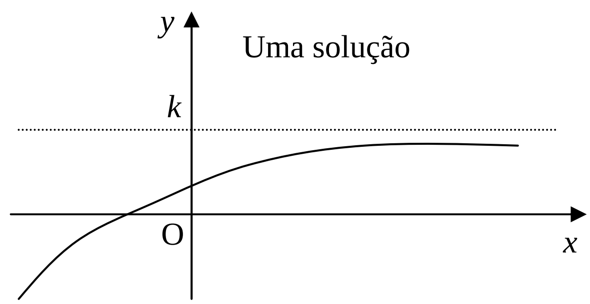
7.7) (2006 -1) Determine as dimensões do cone circular reto que minimizam seu volume, sabendo que a sua geratriz é o segmento de reta cujas extremidades são os pontos A (a, 0) e B ($0,b$), e que passa pelo ponto P (1, 1), conforme a figura ao lado.



RESPOSTAS

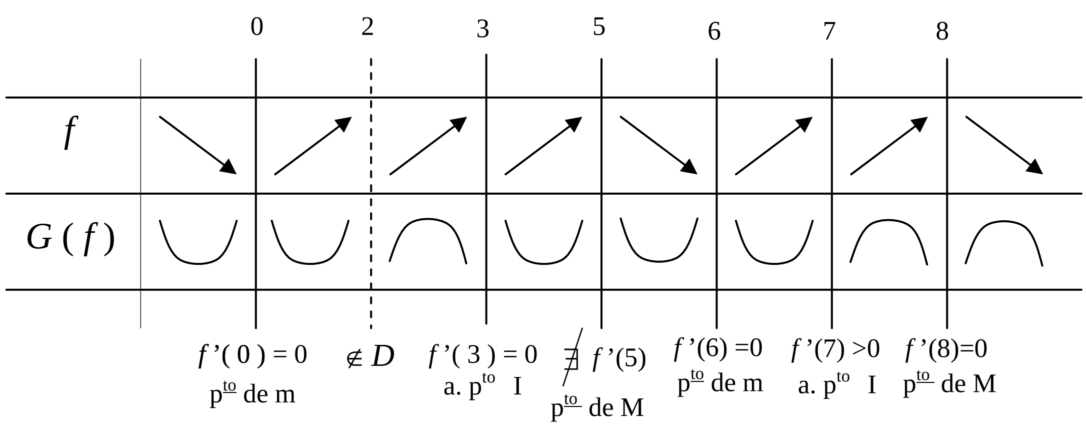
1) a) 1/8. b) 2. c) –1/8. d) 1. e) 1/2. f) 1/2. g) $+\infty$.
h) $1/\sqrt{e}$ i) 1. j) 2. k) 1. l) e^2. m) $1/e^6$. n) $\sqrt[3]{e}$.
o) $\sqrt{e^3}$. p) 1 q) e^6 r) ½.

2) Observe que o gráfico de f deve ter : CVB em R pois f' é decrescente em R . Também, f deve ser uma função crescente em R pois $f'(x) > 0, \forall x \in R$.

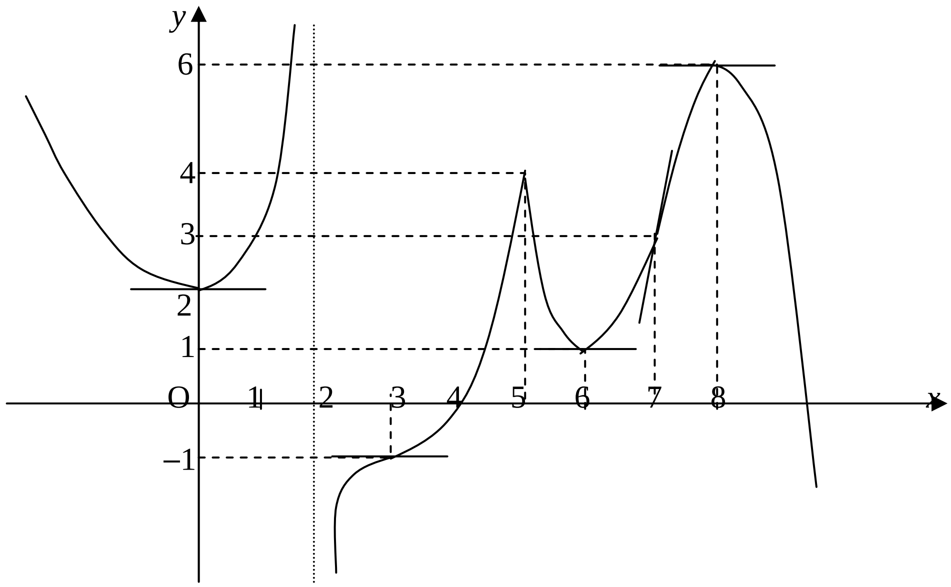


3) $P(-2, -2/e^2)$; $f'(x) = (1+x)\,e^x$ e $f''(x) = (2+x)\,e^x$

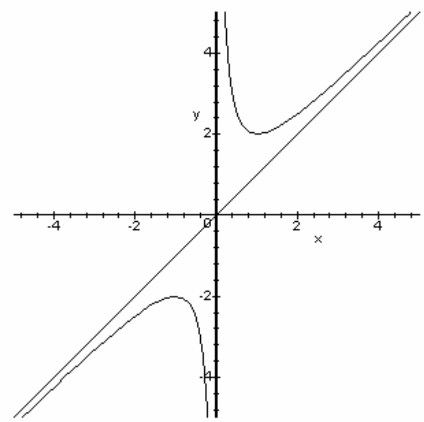
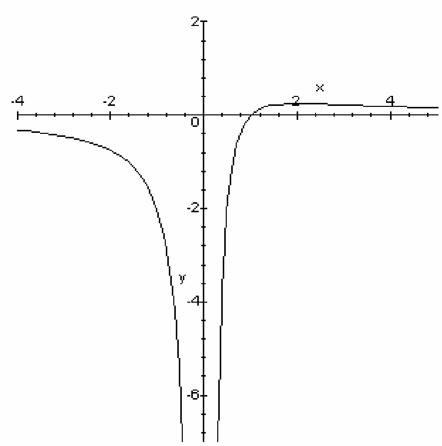
4) 4.1) Pontos críticos de f: 0, 3, 5, 6 e 8.
4.2) Intervalos de crescimento: [0, 2 [;] 2, 5] e [6, 8];
intervalos de decrescimento: $]-\infty, 0]$; [5, 6] e $[8, +\infty[$.
4.3) Pontos de máximo local de f: 5 e 8 ; pontos de mínimo local de f: 0 e 6.
4.4) CVC: $]-\infty, 2[$ e] 3, 7 [; CVB:] 2,3 [e $]7, +\infty[$.
4.5) Abscissas de pontos de inflexão de $G(f)$: 3 e 7.

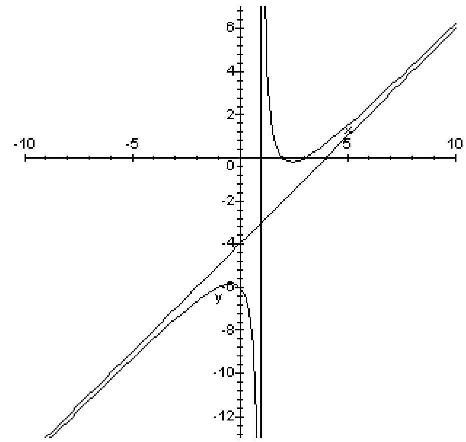
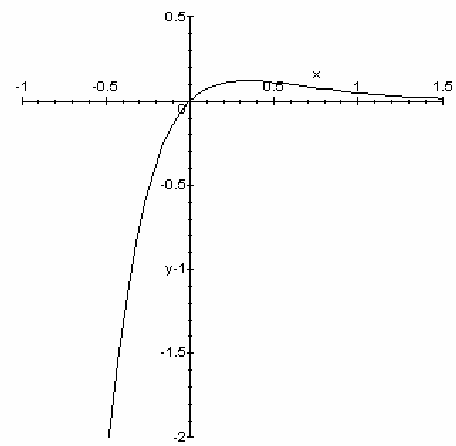
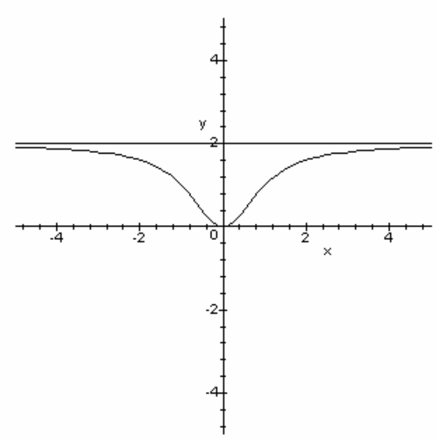


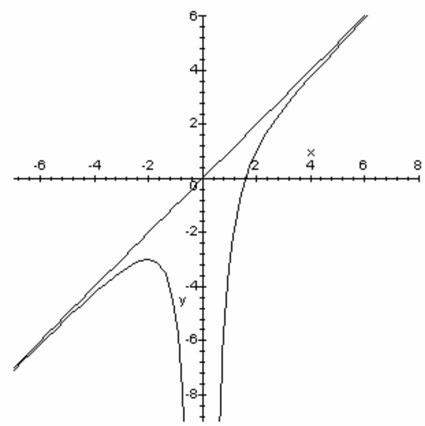
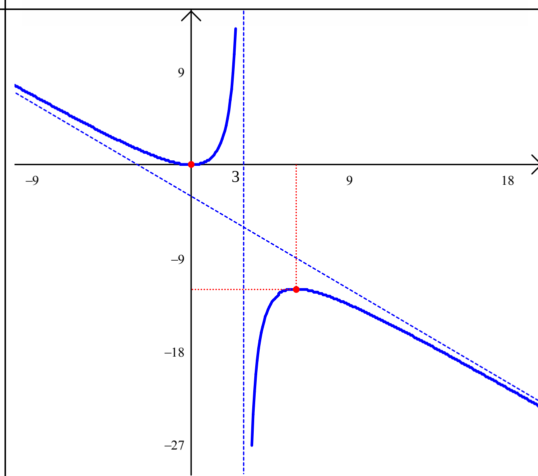
4.6) Gráfico de f:



5)

5.1)	$D(f) = R^*$; o gráfico de f não intercepta os eixos coordenados; assíntota vertical: $x = 0$ e assíntota oblíqua: $y = x$ (quando $x \to -\infty$ e $x \to +\infty$); as assíntotas não interceptam $G(f)$; f é crescente em $]-\infty, -1]$ e em $[1, +\infty[$ e é decrescente em $[-1,0[$ e em $]0, 1]$; $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2}$; ponto de máximo local de $G(f)$: $(-1,-2)$; ponto de mínimo local de $G(f)$: $(1,2)$; $f''(x) = \dfrac{2}{x^3}$; $G(f)$ tem CVC em $]0, +\infty[$ e CVB em $]-\infty, 0[$; $G(f)$ não tem ponto de inflexão.	Gráfico de f 
5.2)	$D(f) = R^*$; o gráfico de f intercepta apenas o eixo Ox no ponto $(1, 0)$; assíntota vertical : $x = 0$, assíntota horizontal: $y = 0$ (quando $x \to -\infty$ e $x \to +\infty$) ; apenas a assíntota horizontal intercepta o gráfico de f no ponto $(1, 0)$; f é crescente em $]0, 2]$ e é decrescente em $]-\infty, 0[$ e em $[2, +\infty[$; ponto de máximo local do gráfico de f : $(2, 1/4)$; não tem ponto de mínimo local ; $G(f)$ tem CVC em $]3, +\infty[$ e CVB em $]-\infty, 0[$ e em $]0, 3[$; ponto de inflexão $G(f)$: $(3, 2/9)$.	Gráfico de f 

5.3)	$D(x) = R - \{1\}$; interseção do eixo Ox com $G(f)$ nos pontos: $(2, 0)$ e $(3, 0)$ e interseção do eixo Oy com $G(f)$ no ponto: $(0, -6)$; assíntota vertical : $x = 1$, assíntota oblíqua : $y = x - 4$ (quando $x \to -\infty$ e $x \to +\infty$); as assíntotas não interceptam $G(f)$, a assíntota vertical intercepta Ox em $(1, 0)$ e não intercepta Oy, e a assíntota oblíqua intercepta Ox em $(4, 0)$ e Oy em $(0, -4)$; f é crescente em $]-\infty, 1-\sqrt{2}]$ e em $[1+\sqrt{2}, +\infty[$ e é decrescente em $[1-\sqrt{2}, 1[$ e em $]1, 1+\sqrt{2}]$; ponto de máximo local do gráfico de f: $(1-\sqrt{2}, -2\sqrt{2}-3) \cong (-0{,}4, -6{,}2)$ e ponto de mínimo local do gráfico de f: $(1+\sqrt{2}, 2\sqrt{2}-3) \cong (2{,}4, -0{,}2)$; $G(f)$ tem CVC em $]1, +\infty[$ e CVB em $]-\infty, 1[$; $G(f)$ não tem ponto de inflexão.	Gráfico de f 
5.4)	$D(f) = R$; o gráfico de f intercepta os eixos coordenados na origem; não tem assítota vertical nem oblíqua, e a assíntota horizontal é $y = 0$ ($x \to +\infty$), que intercepta $G(f)$ na origem; f é crescente em $]-\infty, 1/3]$ e é decrescente em $[1/3, +\infty[$; o gráfico de f tem máximo local no ponto $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3e}\right) \cong (0{,}3, 0{,}1)$ e não tem mínimo local; $G(f)$ tem CVC em $]2/3, +\infty[$ e tem CVB em $]-\infty, 2/3[$; ponto de inflexão: $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3e^2}\right) \cong (0{,}7, 0{,}1)$.	Gráfico de f 
5.5)	$D(f) = R$; o gráfico de f intercepta os eixos coordenados na origem ; não tem assíntota vertical nem oblíqua, e a assíntota horizontal é $y = 2$ (quando $x \to -\infty$ e $x \to +\infty$), que não intercepta $G(f)$ e intercepta apenas o eixo Oy no ponto $(0, 2)$; f é crescente em $[0, +\infty[$ e é decrescente em $]-\infty, 0]$; o gráfico de f tem mínimo local no ponto $O(0, 0)$ e não tem máximo local; $G(f)$ tem CVC em $\left]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right[$ e em $\left]\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty\right[$ tem CVB em $\left]-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right[$; os pontos de inflexão são: $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{2}\right)$ e $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{2}\right)$.	Gráfico de f 

5.6)	$D(f) = R^*$; o gráfico de f intercepta apenas o eixo Ox no ponto $(\sqrt[3]{4}, 0)$; assíntota vertical: $x = 0$, não tem assíntota horizontal e a assíntota oblíqua é $y = x$ (quando $x \to -\infty$ e $x \to +\infty$), que não intercepta $G(f)$ e intercepta os eixos coordenados na origem; f é crescente em $]-\infty, -2]$ e em $]0, +\infty[$ e é decrescente em $[-2, 0[$; $G(f)$ não tem mínimo local e tem máximo local no ponto $(-2, -3)$; $G(f)$ tem apenas CVB em $]-\infty, 0[$ e em $]0, +\infty[$; não tem ponto de inflexão.	Gráfico de f 
5.7)	$D(f) = R - \{3\}$; *; o gráfico de f intercepta os eixos na origem (0,0); assíntota vertical: $x = 3$, não tem assíntota horizontal e a assíntota oblíqua é $y = -x-3$ (quando $x \to -\infty$ e $x \to +\infty$), que não intercepta $G(f)$ e intercepta os eixos em (-3,0) e (0,-3); f é decrescente em $]-\infty, 0]$ e em $[6, +\infty[$ e é crescente em $[0,3[$ e em $]3,6]$; $G(f)$ tem mínimo local no ponto (0,0) e tem máximo local no ponto $(6, -12)$; $G(f)$ tem CVC em $]-\infty, 3[$ e CVB em $]3, +\infty[$; não tem ponto de inflexão.	

6) 6.1) $a = -11$ e $b = 19$. (Observe que $f''(1) < 0$, logo, nestas condições, 1 é ponto de máximo relativo de f).

6.2) $a = -6$ e $b = 8$. 6.3) $a = -\dfrac{9}{2}$ e $b = 6$.

7) 7.1) O valor mínimo do custo médio por unidade produzida é de R$ 35,00.

7.2) A melhor ocasião de venda se dá no 5º ano (ou $t = 4$ anos).

7.3) $a = 100\ m$ e $r = \dfrac{100}{\pi}\ m$.

7.4) A base quadrada deve ter lados de medida 4 *cm* cada e a altura deve medir 2 *cm*.

7.5) Os lados onde foram considerados os lados médios devem medir 10 *cm* cada e os outros dois lados 5 *cm* cada.

7.6) A viga de resistência máxima que pode ser cortada em um toro cilíndrico de raio a deve ter largura de $\dfrac{2a}{3}\sqrt{3}$ e altura de $\dfrac{2a}{3}\sqrt{6}$.

7.7) a = 3/2 u.c e b = 3 u.c.