INSTITUTO DE MATEMÁTICA -UFBA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
LIMITES E DERIVADAS – MAT B33

3ª LISTA DE EXERCÍCIOS - 2008.2 - Profª Graça Luzia Dominguez Santos

1. Prove que entre duas raízes consecutivas de uma função polinomial f existe pelo menos uma raiz de f '.

2. Suponha que f é derivável em R. Prove que entre duas raízes consecutivas de f' há, no máximo uma raiz de f.

3. Sejam f e g contínuas em [a,b], deriváveis em]a,b[, com $g(x) \neq 0$ em [a,b]. Suponha, ainda, que $f(a) = g(a)$ e $f(b) = g(b)$. Prove que existe $c \in]a,b[$ tal que $f'(c)g(c) = f(c)g'(c)$.

4. Em cada um dos seguintes casos, verificar se o Teorema do valor Médio se aplica. Em caso afirmativo, determinar um número c em]a,b[, tal que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$; $a = 2$, $b = 3$ b) $f(x) = \dfrac{1}{x}$; $a = -1$, $b = 3$.

c) $f(x) = cos(x)$; $a = 0$ e $b = \pi/2$ d) $f(x)\sqrt{1-x^2}$; $a = -1$, $b = 0$

5. Sejam I um intervalo, f uma função contínua em I e tal que $|\, f'(x)| \leq M$ para todo x no interior de I, com $M > 0$ é um número real fixo. Prove que quaisquer que sejam x, y em I temos $|\, f(x) - f(y)| \leq M\, |\, x - y|$.

6. Mostre que quaisquer que sejam $s, t \in [1, +\infty[$ temos $|\ln(s) - \ln(t)| \leq |s - t|$.

7. Sejam $a < b$ dois números reais dados. Mostre que: $\dfrac{e^b - e^a}{b - a} < e^b$.

8. Prove que para quaisquer que sejam a e b, $a < b$, $arctg(b) - arctg(a) < b - a$. Conclua que para todo $x > 0$, $arctg(x) < x$.

9. Calcular os seguintes limites, usando as regras de L´Hospital:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2^x - 3^x}{x}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{\text{sen}(\pi x)}{2 - x}$ c) $\displaystyle\lim_{x\to \pi/2} (secx - tgx)$ d) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left\lfloor 3x\left(1 - e^{1/x}\right)\right\rfloor$

e) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\left[\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right]$ f) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^{(1/\ln x)}$ g) $\displaystyle\lim_{x\to 1} (1-x).tg(\frac{\pi x}{2})$ h) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} (x\, lnx)$

i) $\displaystyle\lim_{x\to \pi/2^-} (tgx)^{\text{sen}\, 2x}$ j) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} (1 + \text{sen}\, x)^{2/x}$ l) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ m) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\text{sen}(1/x)}{arctg(1/x)}$

n) $\displaystyle\lim_{x\to 1/2^-} \frac{\ln(1-2x)}{tg(\pi x)}$ o) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x + \text{sen}\, x - 1}{\ln(1+x)}$ p) $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{\sqrt[3]{1+2x} + 1}{x + \sqrt{2+x}}$ q) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(e^x + x\right)^{2/x}$

10. Se $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\left[\frac{ax+1}{ax-1}\right]^x = 9$, determinar a.

11. Sabe-se que f é definida e contínua em R, g é definida e contínua em R-{-2,4},e que os gráficos a seguir representam, respectivamente, as derivadas de f e g.

Determine, para as funções f e g,

a) as abscissas dos pontos críticos;

b) as abscissas dos pontos de máximo e de mínimo;

c) os intervalos de crescimento e decrescimento;

d) os intervalos onde a concavidade é voltada para cima e onde a concavidade é voltada para baixo;

e) as abscissas dos pontos de inflexão;

g) esboce o gráfico da função g no intervalo [-1 ,3], considerando g (-1) = 0, g (0) = 2, g (1) = a, para um a conveniente,

g (3/2) = 3, g (2) = 2 e g (3) = 3.

Gráfico de f'

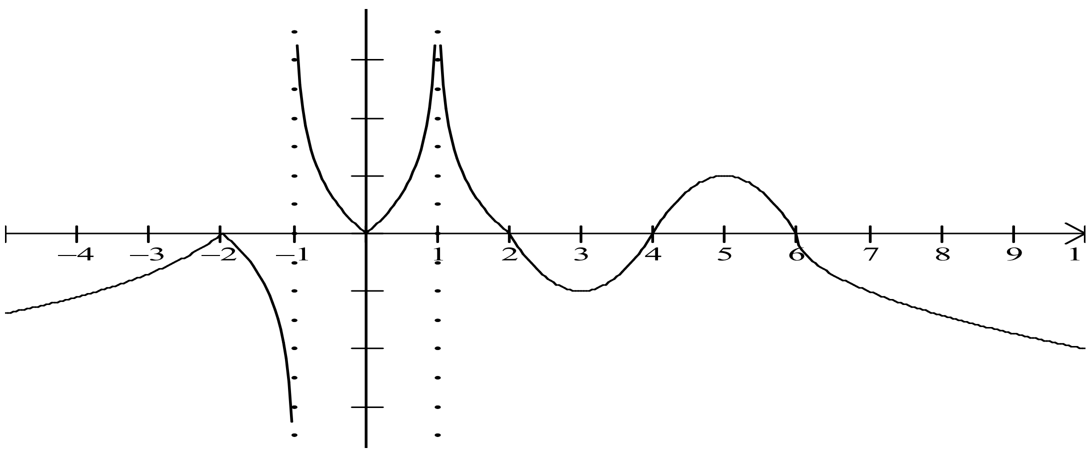
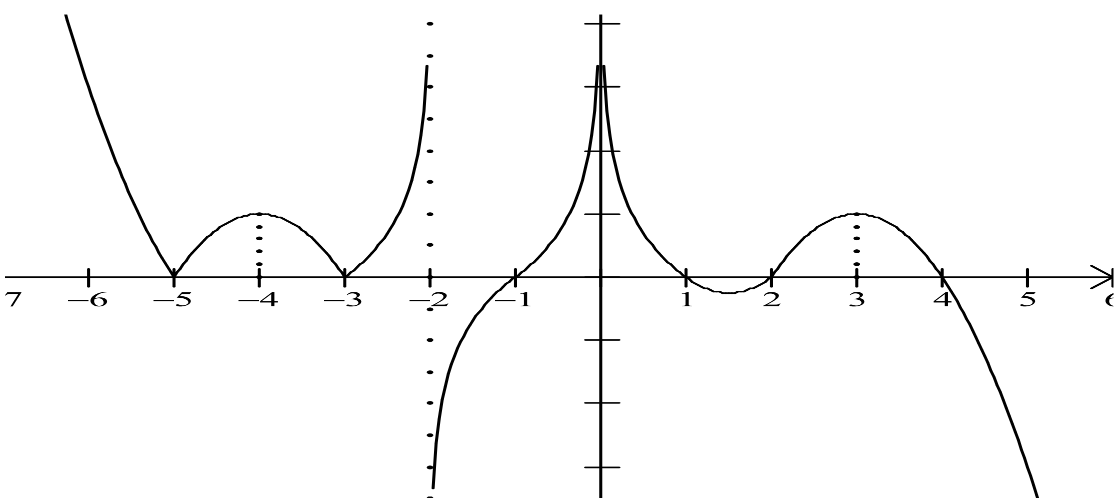


Gráfico de g'



12. Determine as constantes nas funções abaixo, de modo que:

a) $f(x) = a\,x\,e^{-x^2}$ tenha um máximo em $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$;

b) $f(x) = \sqrt{x} + \left(\dfrac{a}{\sqrt{x}}\right)$, $x > 0$, tenha um mínimo em $x = 1$;

c) $f(x)=x^3+a\,x^2+b\,x+c$ tenha pontos críticos em x = -2 e x = 3. Qual é o de máximo e qual é o de mínimo?

d) $f(x)=a\,x^2+b\,x+c$ tenha um máximo relativo no ponto P (1, 7) e o gráfico de $y=f(x)$ passe pelo ponto Q (2,-2);

e) $f(x)=x^3+a\,x^2+b\,x+c$ tenha um extremo em x = 4 e um ponto de inflexão em x = 1;

f) $f(x)=a\,x^3+b\,x^2+c\,x$ tenha um ponto de inflexão P (1, 2) e a inclinação da reta tangente nesse ponto seja -2.

13. Determine os extremos absolutos das funções:

a) $y=\ln x-x,\ e\le x\le e^2$; $(e\cong 2{,}718281)$

b) $y=2\,\text{sen}(x)+\cos(2x),\ |x|\le\pi.$

14. Para cada função a seguir, determine (se possível): o domínio, as interseções com os eixos , as assíntotas, as interseções com as assíntotas, os intervalos de crescimento e de decrescimento, os máximos e mínimos, os intervalos onde o gráfico é côncavo e onde o gráfico é convexo, os pontos de inflexão, o esboço gráfico.

a) $f(x) = 10 + 12x - 3x^2 - 2x^3$ b) $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$ c) $f(x)=\dfrac{x^2-4x+3}{x^2}$ d) $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$

e) $f(x)=\dfrac{x}{(x+1)^2}$ f) $f(x)=e^{-x^2}$ g) $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$ h) $f(x)=\ln(x^2+1)$

i) $f(x)=\dfrac{x}{2\ln x}$ j) $f(x)=\sqrt{x^2+2x+5}$ k) $f(x)=\sqrt[3]{(x^2-1)^2}$ l) $f(x)=1+(x-2)^{2/3}$

m) $f(x)=x\sqrt{9-x^2}$ n) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}\,(4+x)$

15. PROBLEMAS DE MÁXIMOS E MÍNIMOS

a) Prove que se o produto de dois números positivos é constante, a soma é mínima quando os dois números são iguais.

b) Molde um fio de arame de comprimento L em forma de um retângulo cuja área seja a maior possível.

c) Uma reta variável passando por P (1,2) intersecta o eixo Ox em A (a,0) e o eixo Oy em B (0,b). Determine o triângulo OAB de área mínima para a e b positivos.

d) Faz-se girar um triângulo retângulo de hipotenusa dada H em torno de um de seus catetos, gerando um cone circular reto. Determine o cone de volume máximo.

e) Dentre os retângulos com base no eixo Ox e vértices superiores sobre a parábola $y=12-x^2$, determine o de área máxima.

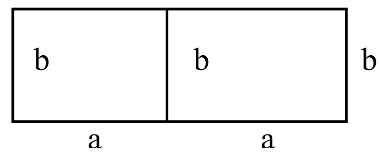
f) Considere uma barraca na forma de um cone. Encontre a razão entre a medida do raio e a medida da altura para que uma tal barraca de volume dado V exija a menor quantidade de material . (Não considere o piso da barraca).

g) Um caixa com fundo quadrado e sem tampa deve ser forrada com couro. Quais devem ser as dimensões da caixa que requerem a quantidade mínima de couro, sabendo que a sua capacidade é 32 litros?

h) Um cartaz deve conter $50cm^2$ de matéria impressa com duas margens de 4cm em cima e embaixo e duas margens laterais de 2cm cada. Determine as dimensões externas do cartaz de modo que a sua área total seja mínima.

i) Corta-se um pedaço de arame de comprimento L em duas partes; com uma das partes faz-se uma circunferência e com a outra um quadrado. Em que ponto deve-se cortar o arame para que a soma das áreas compreendidas pelas duas figuras seja mínima ?

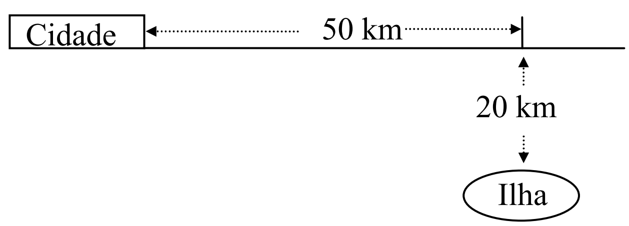
j) Um fazendeiro deve construir dois currais lado a lado, com uma cerca comum. Se cada curral deve possuir uma certa área A, qual o comprimento da menor cerca necessária?



k) Um tanque de base quadrada, sem tampa, deve conter $125cm^3$. O custo, por metro quadrado, para a base é de R\$8,00 e para os lados R\$4,00. Encontre as dimensões do tanque para que o custo seja mínimo.

l) Um cocho de fundo plano e lados igualmente inclinados deve ser construído dobrando-se um pedaço comprido de metal com largura a. Se os lados e o fundo têm largura $a/3$, qual a inclinação dos lados que fornecerá a maior seção reta?

m) Uma ilha situada a 20km de uma costa relativamente reta deve organizar um serviço de barcas para uma cidade que dista 50km, contados como na figura abaixo. Se a barca tem uma velocidade de 15km/h e os carros têm uma velocidade média de 45km/h, onde deverá estar situada a estação das barcas, ao longo da costa, a fim de tornar a viagem mais rápida possível?



n) Desejamos fazer uma caixa retangular aberta com um pedaço de papelão de 8cm de largura e 15cm de comprimento, cortando um pequeno quadrado em cada canto e dobrando os lados para cima. Determine as dimensões da caixa de volume máximo.

o) Considere dois pontos A e B, diametralmente opostos, situados na margem de um lago circular. Um homem vai do ponto A a um ponto C, também situado na margem do lago entre os pontos A e B, nadando em linha reta com a velocidade de 5/3 m/s. Do ponto C até o ponto B ele vai correndo pela margem, com a velocidade de 10/3 m/s. Determine o ângulo θ, igual ao ângulo $B\hat{A}C$, que corresponde ao menor tempo de percurso, considerando o círculo de raio r constante, $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, e sabendo que o comprimento do arco CB é igual a $\theta.\overline{AB}$.

p) Qual o triângulo isósceles de maior área que se pode inscrever num círculo dado?

16. Determinar o polinômio de Taylor de ordem n, no ponto c dado, das seguintes funções:

a) f(x) = $e^{x/2}$; c = 0, 1; n = 5

b) f(x) = ln(1-x); c = 0 e c = ½; n = 4

c) f(x) = cos 2x; c = 0 e $\pi/2$; n = 6

17. Encontrar o polinômio de Taylor de grau n no ponto c e escrever a função que define o resto da forma de Lagrange, das seguintes funções:

a) y = tg x; n = 3 e c = π

b) y = $\sqrt{x}$; n = 3 e c = 1

c) y = e^{-x^2} ; n = 4 e c = 0

18.Usando o resultado encontrado no exercício 19b),com c = 0, determine um valor aproximado para ln 0,5. Fazer uma estimativa para o erro.

19. Determinar o polinômio de Taylor de grau 6 da função f(x) = 1 +cosx no ponto c = π. Usar este polinômio para determinar um valor aproximado para cos($5\pi/6$). Fazer uma estimativa do erro.

20. Determine os máximos e mínimos das seguintes funções:

f(x) = $(x-4)^{10}$ b) f(x) = $4(x+2)^7$

c) f(x) = $x^6 - 2x^4$ d) f(x) = $x^5 - \frac{125}{3}x^3$

<u>RESPOSTAS</u> <u>DA</u> 3ª <u>LISTA</u>

4. a) $\sqrt{6}$ b) $\nexists$ c) arcsen($2/\pi$)   d) $-\sqrt{2}/2$

9. a) $\ln(\frac{2}{3})$ b) $-\pi$ c) 0   d) -3 e) $\frac{1}{2}$ f) e

g) $\frac{2}{\pi}$ h) 0   i) 1   j) e^2 l) e m) 1

n) 0   o) 2   p) $\frac{4}{9}$ q) e^2

10. $\frac{1}{\ln 3}$

11. **Para f :**

a) -2, -1, 0, 1, 2, 4, 6   b) x_{max} = 2 e 6; x_{min} = -1 e 4

c) crescente em [-1, 1] ; [1, 2] ; [4, 6]; decrescente em ($-\infty$, -1]; [2, 4]; [6,$+\infty$)

d) concavidade para cima em ($-\infty$, , -2) ; (0, 1) ; (3, 5); concavidade para baixo em (-2,-1); (-1,0); (1, 3); (5, $+\infty$)

e) -2, 0, 1, 3, 5

Para g:

a) -5, -3, -1, 0, 1, 2   b) x_{max} = 1, x_{min} = -1, x_{min} = 2

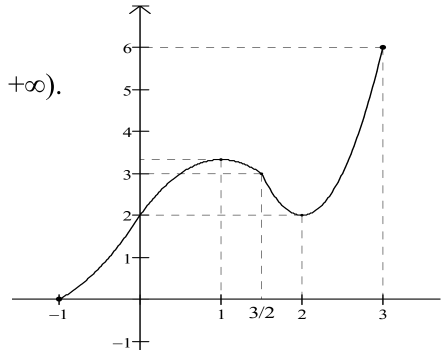
c) crescente em $(-\infty, -2)$; $[-1, 1]$; $[2, 4)$; decrescente em $(-2, -1]$; $[1, 2]$; $(4, +\infty)$.

d) concavidade para cima em $(-5, -4)$; $(-3,-2)$; $(-2, 0)$; $(3/2, 3)$;

concavidade para baixo em $(-\infty ,-5)$; $(-4, -3)$; $(0, 3/2)$; $(3, 4)$; $(4, +\infty)$.

e) -5, -4, -3, 0, 3/2, 3

f) gráfico da g em [-1, 3]:



12.a) $a \in IR^*_+$ b) $a = 1$

c) $a = -3/2$, $b = -18$ e $c \in$ IR, $x_{max} = -2$, $x_{min} = 3$; d) $a = -9$, $b = 18$, $c = -2$ e) $a = -3$, $b = -24$, $c \in$ R;

f) $a = 4$, $b = -12$, $c = 10$.

13.a) máx: $1-e$ em $x = e$; mín: $2-e^2$ em $x = e^2$

b) máx: 1,5 em $x = \pi/6$ e $x = 5\pi/6$; mín: -3 em $x = -\pi/2$

14.

a) $D(f)=IR$; interseção com Oy: P(0, 10); não tem assíntotas; crescente em [-2, 1]; decrescente em $(-\infty, -2]$ e em $[1, +\infty)$; máx. em Q(1, 17); mín. em R(-2, -10); concavidade para cima em $(-\infty, -1/2)$; concavidade para baixo em $(-1/2, +\infty)$; ponto de inflexão M(-1/2, 7/2).

b) $D(f) = IR$; intersecta os eixos na origem; assíntota: $y = 0$; interseção com a assíntota em (0,0); crescente em [-1, 1]; decrescente em $(-\infty, -1]$ e em $[1,+\infty)$; máx. em $Q(1,1)$; mín. em $P(-1,-1)$; concavidade para baixo em $\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)$ e em $(0,\sqrt{3})$; concavidade para cima em $\left(-\sqrt{3},0\right)$ e em $(\sqrt{3},+\infty)$; pontos de inflexão: $M(-\sqrt{3},-\sqrt{3/2})$, $O(0,0)$ e $N\left(\sqrt{3},\sqrt{3}/2\right)$.

c) $D(f)=IR^*$; interseção com Ox: $P(1,0)$ e $Q(3,0)$; assíntotas: $x=0$ e $y=1$; interseção com a assíntota horizontal: $R(3/4,1)$; f é crescente em $(-\infty,0)$ e em $[3/2,+\infty)$ e f é decrescente em $(0,3/2]$; $x_{mín}=3/2$ e $y_{mín}=-1/3$, não tem máximo; concavidade para cima em $(-\infty,0)$ e em $(0,9/4)$ e concavidade para baixo em $(9/4,+\infty)$; ponto de inflexão $S(9/4, -5/27)$.

d) $D(f) = IR - \{\pm 1\}$; interseção com os eixos na origem; assíntotas: $x = -1$, $x = 1$ e $y = x$; tem interseção com a assíntota $y = x$ na origem, $O(0,0)$; crescente se $(-\infty,-\sqrt{3}]$ e em $[\sqrt{3},+\infty)$; decrescente $[-\sqrt{3},-1[;]-1,1[;]1,\sqrt{3}]$; máx. em $P\left(-\sqrt{3},-3\sqrt{3}/2\right)$; mín. em $Q\left(\sqrt{3},3\sqrt{3}/2\right)$; concavidade para baixo em $(-\infty, -1)$ e em $(0, 1)$; concavidade para cima em $\left(-1,0\right)$ e em $(1,+\infty)$; ponto de inflexão $O(0,0)$.

e) $D(f)=IR-\{-1\}$; interseção com os eixos: $O(0,0)$; assíntotas: $x = -1$ e $y = 0$; interseção com as assíntotas: $O(0,0)$; f é crescente em $(-1,1]$ e decrescente em $(-\infty,-1)$ e em $[1,+\infty)$; máx em R(1, ¼), não tem mínimo;

concavidade para cima em $(2,+\infty)$ e concavidade para baixo em $(-\infty,-1)$ e em $(-1,2)$; ponto de inflexão: $P(2,2/9)$.

f) $D(f)=IR$; interseção com Oy: N(0, 1); asssíntota: y = 0; não tem interseção com a assíntota; crescente em $(-\infty, 0]$; decrescente em $[0, +\infty)$; máx. em N(0, 1); não tem mín.; concavidade para cima em $(-\infty,-\sqrt{2}/2)$ e em $(\sqrt{2}/2,+\infty)$; concavidade para baixo se $(-\sqrt{2}/2,\sqrt{2}/2)$; pontos de inflexão $P\left(-\sqrt{2}/2, e^{-1/2}\right)$ e $Q\left(\sqrt{2}/2, e^{-1/2}\right)$.

g) $D(f) = IR - \{0\}$; não tem interseção com os eixos; assíntotas: x = 0 e y = 0: não tem interseção com as assíntotas; crescente em $[1, +\infty)$; decrescente em $(-\infty, 0)$ e em $(0, 1]$; mín. em $P(1, e)$; não tem máx.; concavidade para cima em $(0, +\infty)$; concavidade para baixo em $(-\infty, 0)$; não tem ponto de inflexão.

h) $D(f) = IR$; interseção com os eixos na origem; não tem assíntotas; crescente em $[0,+\infty)$; decrescente em $(-\infty, 0]$; mín. em M(0, 0); não tem máx.; concavidade para cima em (-1,1); concavidade para baixo em $(-\infty,1)$ e em $(1,+\infty)$; ponto de inflexão em $P(1,\ln 2)$ e $Q(-1,\ln 2)$.

i) $D(f) = (0,1) \cup (1,+\infty)$; não tem interseção com os eixos; assíntota: x = 1; não tem interseção com a assíntota; crescente em $[e, +\infty)$; decrescente em (0, 1) e em (1, e]; mín. em N(e, e/2); não tem máx.; concavidade para cima em $(1, e^2)$; concavidade para baixo em (0, 1) e em $(e^2, +\infty)$; ponto de inflexão em $M(e^2, e^2/4)$.

j) $D(f)=IR$; interseção com Oy: P(0, $\sqrt{5}$); assíntotas: $y = x + 1$ e $y = -x - 1$; não tem interseção com as assíntotas; crescente em $[-1,+\infty)$; decrescente em $(-\infty, -1]$; mín. em Q(-1, 2); não tem ponto de máx.; concavidade para cima em IR; não tem ponto de inflexão.

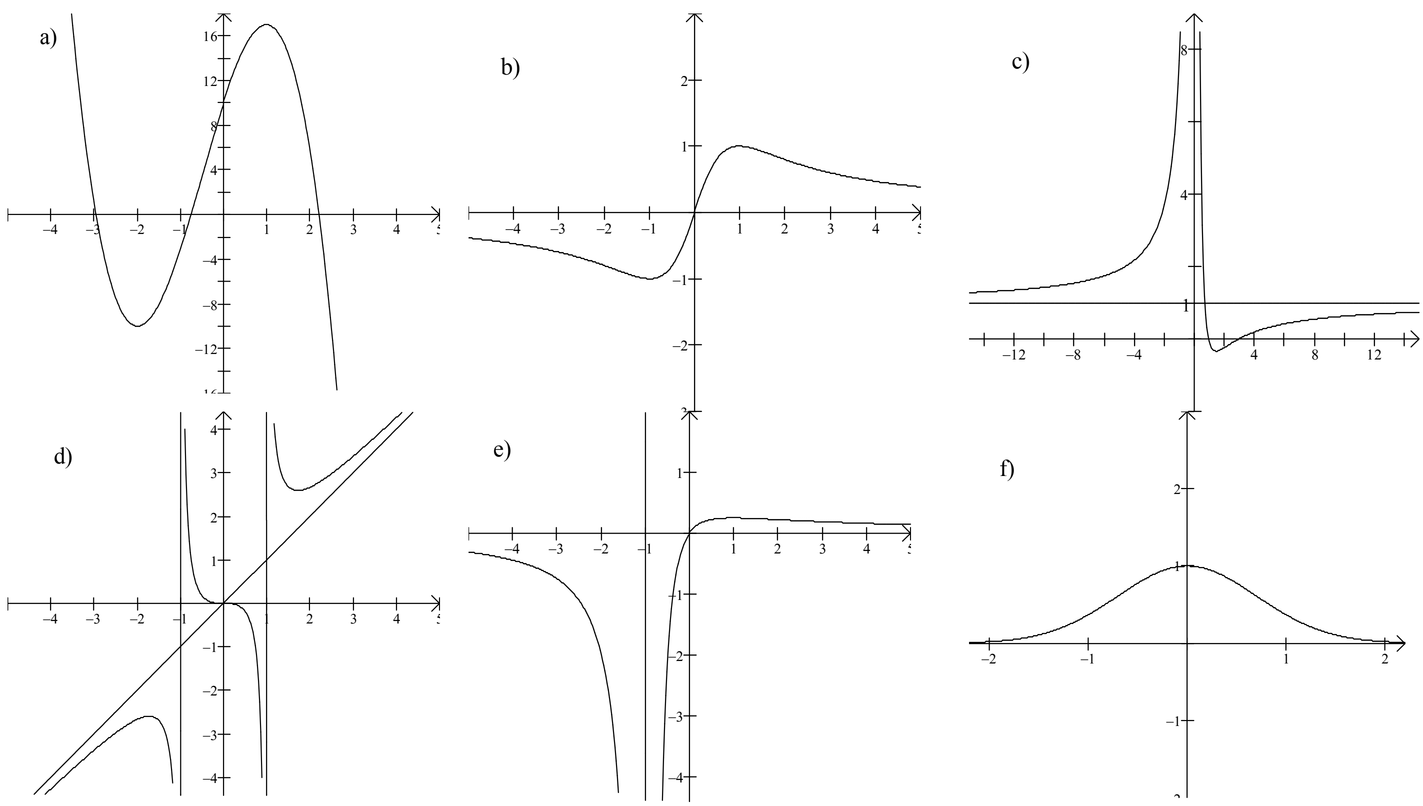
k) $D(f) = IR$; interseção com Oy: $R(0,1)$; interseção com Ox em $M(-1,0)$ e $N(1,0)$; não tem assíntotas; crescente em $[-1,0]$ e em $[1,+\infty)$; decrescente em $(-\infty,-1]$ e em $[0,1]$; máx. em R(0, 1); mín. em M(-1, 0) e N(1, 0); concavidade para cima em $(-\infty, -\sqrt{3})$ e em $(\sqrt{3}, +\infty)$; concavidade para baixo em $(-\sqrt{3}, -1)$, $(-1, 1)$ e em $(1, \sqrt{3})$; pontos de inflexão $P\left(-\sqrt{3}, \sqrt[3]{4}\right)$ e $Q\left(\sqrt{3}, \sqrt[3]{4}\right)$.

l) $D(f) = IR$; interseção com Oy: $S\left(0,\ 1+\sqrt[3]{4}\right)$; não tem assíntotas; crescente em $[2, +\infty)$; decrescente em $(-\infty, 2)$; mín. em $Q(2,1)$; não tem máx.; concavidade para baixo em $(-\infty, 2)$ e em $(2, +\infty)$; não tem ponto de inflexão.

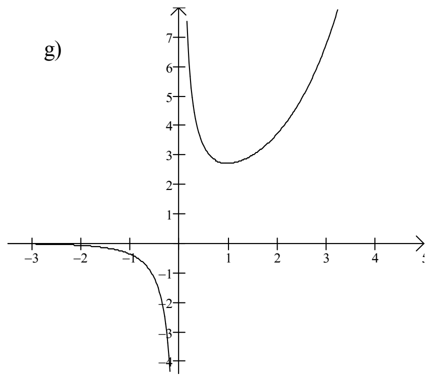
m) $D(f)=[-3{,}3]$; interseção com eixos em $O(0,0)$, $P(3,0)$, $Q(-3,0)$; não tem assíntotas; crescente em $[-3\sqrt{2}/2{,}3\sqrt{2}/2]$; decrescente em $[-3\,,-3\sqrt{2}/2]$ e em $[3\sqrt{2}/2\,,3]$; máx. em $R\left(3\sqrt{2}/2,9/2\right)$; min em $P\left(-3\sqrt{2}/2,-9/2\right)$concavidade para cima em (-3, 0); concavidade para baixo em (0, 3); ponto de inflexão O(0, 0).

n) $f'(x)=\dfrac{5x+8}{3\sqrt[3]{x}}$ e $f''(x)=\dfrac{2\,(5x-4)}{9\sqrt[3]{x^4}}$; $D\,(f)=IR$; interseções com o eixo *Ox*: *P*(- 4, 0) e *O*(0, 0); interseção com eixo *Oy*: *O*(0, 0); não tem assíntotas; *f* é crescente nos intervalos $]-\infty,-8/5]$ e $[0,+\infty[$; f é decrescente no intervalo [- 8/5, 0] ; o gráfico de f tem máximo no ponto $Q(-\dfrac{8}{5},\ \dfrac{12}{5}\sqrt[3]{\dfrac{64}{25}})$, onde a reta tangente é horizontal ($f'(-8/5)=0$); o gráfico de f tem mínimo no ponto *O*(0, 0), onde a reta tangente é vertical; o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo no intervalo $]-\infty,4/5[$; o gráfico de f tem concavidade voltada para cima no intervalo [4/5, $+\infty$ [; ponto de inflexão $R(\dfrac{4}{5},\ \dfrac{24}{5}\sqrt[3]{\dfrac{16}{25}})$.

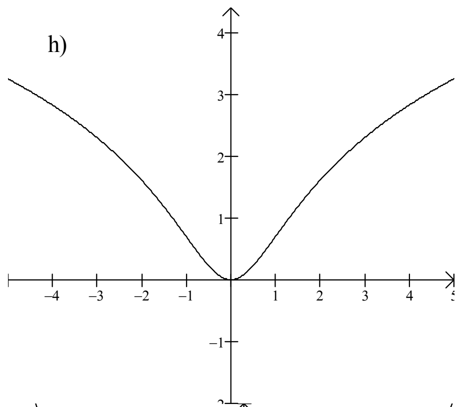
Gráficos da 14ª questão



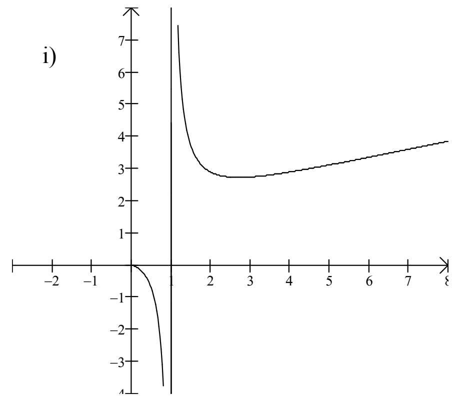
g)



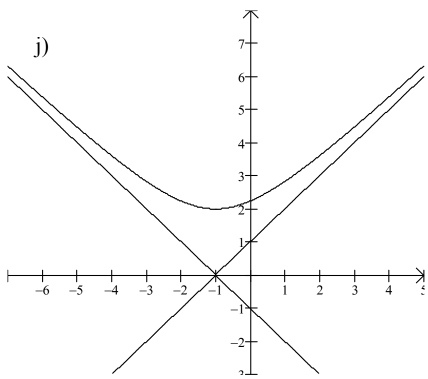
h)



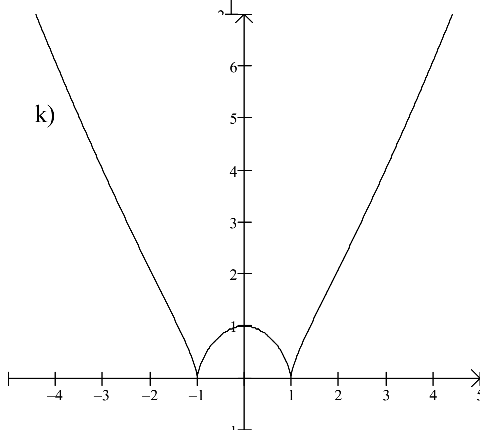
i)



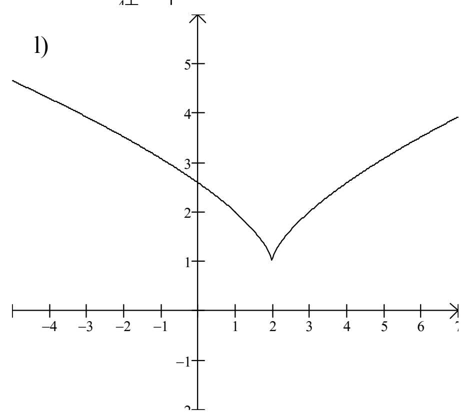
j)



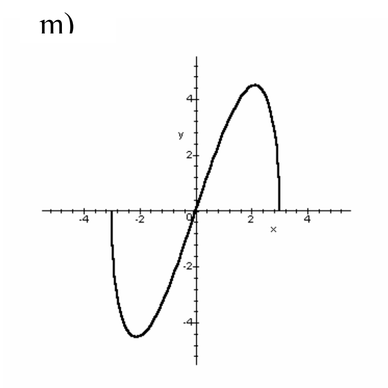
k)



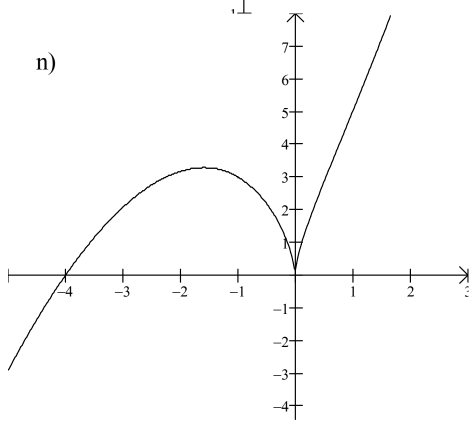
l)



m)



n)



15. b) área = $L^2/16$

c) base = 2, altura = 4;

d) raio = H $\sqrt{2/3}$, altura = H / $\sqrt{3}$

e) base = 4, altura = 8

f) r / h = $\sqrt{2}/2$;

g) $4 \times 4 \times 2$ dm^3

h) 9×18

i) área mínima se raio = L $(2\pi + 8)^{-1}$, lado do quadrado = L$(4 + \pi)^{-1}$;

j) $4\sqrt{3A}$;

k) base: 5x5cm^2 e altura: 5cm.

l) θ = π /3 rd m) $\sqrt{50}$ Km

n) 5/3cm, 14/3cm, 35/3cm

o) $\theta = \frac{\pi}{2} rd$, isto é, o homem deve apenas caminhar sobre a margem.

p) lado = $R\sqrt{3}$, altura 3*R*/2 (triângulo eqüilátero)

16. a) c = 0, $P_5(x) = 1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2!2^2}x^2+\frac{1}{3!2^3}x^3+\frac{1}{4!2^4}x^4+\frac{1}{5!2^5}x^5$

c = 1, $P_5(x) = e^{1/2}\left(1+\frac{1}{2}(x-1)+\frac{1}{2!2^2}(x-1)^2+\frac{1}{3!2^3}(x-1)^3+\frac{1}{4!2^4}(x-1)^4+\frac{1}{5!2^5}(x-1)^5\right)$

b) c = 0, $P_4(x) = -x-\frac{1}{2!}x^2-\frac{2}{3!}x^3-\frac{6}{4!}x^4$

$c = \frac{1}{2}$, $P_4(x) = -\ln 2-2\left(x-\frac{1}{2}\right)-\frac{2^2}{2!}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{2^4}{3!}\left(x-\frac{1}{2}\right)^3-\frac{3.2^5}{4!}\left(x-\frac{1}{2}\right)^4$

c) c = 0, $P_6(x) = 1-\frac{4}{2!}x^2+\frac{16}{4!}x^4-\frac{64}{6!}x^6$

c = π/2, $P_6(x) = -1+\frac{4}{2!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2-\frac{16}{4!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^4+\frac{64}{6!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^6$

17. a) $P_3(x) = x-\pi+\frac{(x-\pi)^3}{3}$; $R_3(x) = \frac{(16\sec^4 z.tgz+8\sec^2 z.tg^3 z)(x-\pi)^4}{4!}$

b) $P_3(x) = 1+\frac{1}{2}(x-1)+\frac{1}{8}(x-1)^2+\frac{1}{16}(x-1)^3$; $R_3(x) = \frac{-15}{16z^3\sqrt{z}}.\frac{1}{24}(x-1)^4$

c) $P_4(x) = 1-x^2+\frac{x^4}{2}$; $R_4(x) = \frac{e^{-z^2}}{120}(160z^3-120z-32z^5)x^5$

18. – 0,67448; $|R_4(0,5)| < 0,2$

19. $P_6(x) = \frac{1}{2}(x-\pi)^2-\frac{1}{24}(x-\pi)^4+\frac{1}{720}(x-\pi)^6$; $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) \cong -0,8660331$; $\left|R_6\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right| \le 0,00002$

20. a) min em x = 4 b) ∄ c) max em x = 0; min em x = $\pm\frac{2}{\sqrt{3}}$

d) max em x = -5; min em x = 5.