UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
MAT B33– Limites e Derivadas – Prof[a]. Graça Luzia Dominguez Santos

LISTA DE EXERCÍCIOS(Questões de Provas 2ª UNIDADE)

Derivada

1) Usando a definição de derivada, verifique se as funções são deriváveis no ponto indicado.

1.1) (1999 – 1) $f(x) = |x-3|$, $x_0 = 2$

1.2) (1999 – 2) $f(x) = \sqrt{x^2 + x}$, $x_0 = 2$

1.3) (2000 – 1) $f(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$, $x_0 = 4$

1.4) (1999 – 1) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4, & x \leq 2 \\ x - 2, & x > 2 \end{cases}$, $x_0 = 2$.

1.5) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{3x} - 1, & x \geq 3 \\ \dfrac{x^2}{3} - 1, & x < 3 \end{cases}$, $x_0 = 3$.

2.1) (1999 – 2) Usando a definição de derivada, calcule a derivada da função $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$.

2.2) (2006 – 1) Determine as constantes a e b de modo que exista f ´(-1), sendo

$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < -1 \\ ax + b, & x \geq -1 \end{cases}$. (use a definição de derivada)

3) Usando as regras de derivação, calcule as derivadas das seguintes funções:

3.1) (2000 – 1) $f(x) = x \,\mathrm{sen}\, x$

3.2) (1999 – 2) $f(x) = x^{1/3}(x^2 - 3x + 2)$

3.3) (1999 – 1) $f(x) = \mathrm{sen}^3 x \cos x$

3.4) (1999 – 2) $f(x) = e^x \operatorname{cossec} x - \dfrac{1}{x^2}$

3.5) (2000 – 1) $f(x) = (\mathrm{sen}\, x)\left(\sqrt[3]{x^2} - \dfrac{3}{x^4}\right), x \neq 0$

3.6) (2000 – 1) $f(x) = \sqrt{x}\, tgx$

3.7) (2000 – 1) $f(x) = \dfrac{x^2}{3x - 5}, x \neq \dfrac{5}{3}$

3.8) (2000 – 1) $f(x) = \dfrac{\cos x}{x^2}, x \neq 0$

3.9) (2000 – 1) $f(x) = \dfrac{\mathrm{sen}\, x}{2x - 8}, x \neq 4$

3.10) (1999 – 2) $f(x) = \dfrac{1 + \sec x}{tgx + \mathrm{sen}\, x}$

3.11) (2000 – 1) $f(x)=\dfrac{x.tgx}{2-\cos x}$

3.12) (1999 – 2) $f(x)=\left(\dfrac{x\,\text{sen}\,x}{x+1}\right)^5, x\neq -1$

3.13) (1999 – 2) $f(x)=\dfrac{x\,\text{sen}^2\,x+3^x}{x^3-4x^2+1}$

Reta Tangente

4) Determine as equações das retas tangentes ao gráfico de f no ponto de abscissa x_o:

4.1) (1999 – 1) $f(x)=\sqrt{9-4x}$, em $x_o = -4$.

4.2) (2000 – 1) $f(x)=x^3+3x-1$, em $x_o = 2$.

4.3) (1999 – 2) $f(x)=6\sqrt[3]{x^2}-\dfrac{4}{\sqrt{x}}$, em $x_o = 1$.

5) (2000 – 1) Ache as coordenadas do ponto P de abscissa negativa e pertencente à curva $y=x^3-2x+1$, $x\in\Re$, tais que a reta tangente nesse ponto tenha ângulo de inclinação de 45°.

6) (1999 – 2) Determine a equação da reta tangente ao gráfico de f, definida por $f(x)=x^2+3x+2$, que é paralela à reta $r: y=5x-2$.

7) (2000 – 1) Determine uma reta tangente ao gráfico de $f(x)=\cos(x)$, $x\in(0,\pi)$, sabendo que a reta normal é paralela à reta $y=x+2$.

8) (2000 – 1) Considere a função definida em *IR* pela equação $f(x)=x^3$ e a reta $s: 4x+3y=0$.

8.1) Esboce o gráfico da função f e da reta s num mesmo plano de coordenadas cartesianas, e determine, graficamente, a(s) reta(s) tangente(s) ao gráfico de f que é(são) perpendicular(es) à reta s.

8.2) Determine uma equação de uma das retas tangentes encontradas no item anterior, *caso haja mais de uma*.

Regra da cadeia

9) Para cada uma das funções seguintes, determine a derivada indicada:

a) (1999 – 1) $\dfrac{dy}{dx}$, sendo $y=\text{arctg}\,(\dfrac{1}{x})+(\text{arcsen}\,(\sqrt{1-x^2}))[\log(1-2x)]$.

b) (1999 – 2) $\dfrac{dy}{yx}$, sendo $y=e^{\log_3(x)}-[\text{sen}\,(\cos(x))]^{1/3}$.

c) (1999 – 2) $\dfrac{dy}{dx}$, sendo $y=\arccos\,(\text{sen}\,(e^x))+x^2\,\text{arctg}\,(2x^2+2)$.

d) (1999 – 2) $f'(0)$, sabendo que $f(tg\,(x)-\sqrt{3})-f(4\pi-3x)=\cos(x)$.

e) (1999 – 2) $f'(3)$, sabendo que $f(1+2x)+f(2x^2+1)=4x^2+4x+2$, $\forall x\in\Re$.

f) (1998 – 1) $f'(0)$, sendo $x.f(8-x) = f(x^2-9x+8)+\sqrt[3]{x^2}$ e $f(0) = -\frac{8}{3}$.

g) (1998 – 1) $f'(1)$, sendo $f(x) = g(2-\cos(\frac{\pi x}{2})), \forall x \in [-1,1]$, com $g : \Re \to \Re$ uma função derivável e $g'(2) = 1$.

h) (1999 – 2) $w'(0)$, sendo $u(x) = v(w(x)), w(0) = 0, v'(0) = -3$ e $u'(0) = 2$.

i) (2205- 2) $f'(x)$, sendo $f(x) = (arctg\,2x)^{(x^2+4x)}$, $0 < x < \pi/4$.

j) (2006 – 1) g´(x), sabendo que $f(x) = x^3+2x$ e $g(x) = f(arcsenx)$

Derivada da função inversa

10) Aplicando o resultado anterior, faça o que se pede nos itens a seguir:

a) (1999 – 1) Encontre $(f^{-1})'(f(x))$, sendo $f(x) = \dfrac{\text{sen}\,(2x)}{2+\cos(2x)}, x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$.

b) (1999 – 2) Encontre o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f^{-1} no ponto P (1, 0), sabendo que $f(x) = 3^{arctg(2x)} + x^2$.

c) (1998 – 1) Calcule $g'(f(1))$, sendo $f(x) = x^2 - 2^x$ e g a inversa de f.

d) (1999 – 2) Determine a derivada da função f^{-1} no ponto de abscissa 5, sabendo que $D(f) =]-\infty, -1[$ e f está definida pela equação $f(x) = x^3 - 4x + 5$.

e) (1998 – 1) Determine $(f^{-1})'(1)$, sendo $f(x) = e^{(x+2)/x^2}$.

f) (2006 – 1) De termine $(f^{-1})'(0)$, sendo $f(x) = (x^3+1)arctg\left(\sqrt[3]{x^4+1}\right)$.

Derivação implícita.

11) Para cada um dos seguintes itens, determine a derivada indicada:

a) (1999 – 1) $\dfrac{dy}{dx}$, sendo $y = f(x)$ dada implicitamente pela equação $xe^y - \ln(y+1) = 3$.

b) (1999 – 2) $\dfrac{dx}{dy}$, sendo $x = f(y)$ dada implicitamente pela equação $x^3 + xy + y^3 = 3$.

c) (1999 – 2) $\dfrac{dy}{dx}$, sabendo que $x^2 + \sqrt{\text{sen}(y)} - y^2 = 1$.

d) (1998 – 1) y'_P , sendo P (0, 0) e $y = f(x)$ uma função que satisfaz a equação $\arccos(3x) + \ln(1-2x) + x\,.\,tg\,(y) + \text{sen}\,(y-x) = 0$.

e) (1999 – 2) y'_P , sendo $P(1, 2\pi)$, sabendo que $x^2y + \text{sen}\,(y) = 2\pi$.

f) (2005-2) $\frac{dy}{dx}$, no ponto de ordenada 1, sabendo que y é dada implicitamente por $x\,arctg(y) + xe^{x} = \frac{\pi}{4} + e$.

g) (2006-1) $\frac{dy}{dx}$, no ponto de abscissa 0, sabendo que y é dada implicitamente por $xy^3 + 2y^3 = x - 2y$

Derivada de uma função dada na forma paramétrica

12) Determine:

a) (2006-1) $\frac{dy}{dx}$ no ponto de abscissa -1/2, da função $y(x)$ definida na forma paramétrica pelas equações $\begin{cases} x = 4\cos^3 t \\ y = 4sen^3 t \end{cases}$, $t \in]0, \pi[$.

b) (2006-1) $\frac{d^2y}{dx^2}$, da função $y(x)$ definida na forma paramétrica pelas equações $\begin{cases} x = \arccos t \\ y = \ln\left(\sqrt{1-t^2}\right) \end{cases}, t \in]-1,1[$.

c) (2005-2) $\frac{d^2y}{dx^2}$, da função $y(x)$ definida na forma paramétrica pelas equações $\begin{cases} x = t - sent \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$, $t \in]0, \pi[$, no ponto de ordenada 1.

Reta tangente e reta normal.

13) Determine:

a)(1998 – 1) Uma equação da reta tangente à elipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ no ponto $P(\frac{2\sqrt{5}}{3}, 2)$.

b) (1999 – 2) Uma equação da reta tangente ao gráfico de f^{-1} no ponto de abscissa $a = f(3)$, sendo $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3 - 2}}$, com $x > 2$.

c) (1998 – 1) Uma equação da reta normal à curva $x^2 + 2xy + 3y^2 = 3$ no ponto do 2º quadrante, onde a reta tangente é perpendicular à reta $r: x + y = 1$.

d) 1998 – 1) Uma equação da reta tangente ao gráfico de f, tal que, a mesma seja paralela a reta $r: x - 2y + 2 = 0$, sendo $y = f(x)$ dada implicitamente pela equação $3y^2 + 2xy - x^2 = -3$, para todo $x \in D(f)$, com $f(x) > 0$.

e) (2005 – 2) Determine a equação da reta tangente ao gráfico de f^{-1} no ponto P(1,0), sabendo que $f(x) = 2^{arctg(3x)}$.

f) (2006 – 1) Determine a equação da reta normal ao gráfico de f^{-1}, no ponto de abscissa 1, sabendo que $f(x) = e^{\left(\frac{x+2}{x^2}\right)}$.

g) (2006-1) Determine uma equação da reta tangente ao gráfico da função definida parametricamente pelas equações: $\begin{cases} x = t - sent \\ y = 1 - \cos t \end{cases}, 0 \leq t \leq \pi$.

Taxa de variação

14) a)(22005-2) Um balão sobe verticalmente a uma velocidade constante de 2m/s. Quando ele está a 59 m acima do solo, uma bicicleta que se desloca a uma velocidade constante de 13 m/s passa por baixo dele. A que taxa a distância entre a bicicleta e o balão aumentará três segundos depois?

b) (2006-1)Um balão deixa o solo a uma distância de 300m de um observador e se eleva verticalmente com velocidade de 6m/s. A que taxa está variando o ângulo de elevação do observador no instante em que o balão está a uma altura de 240m?

c) (2006-1) Acumula-se areia em um monte em forma de um cone onde a altura é o dobro do raio da base. Se o volume de areia cresce a uma taxa constante de 32 m^3/h, a que razão aumentará a área da base quando a altura do monte for 6m?

RESPOSTAS

1.1) -1 1.2) $\frac{5}{2\sqrt{6}}$ 1.3) 1/4 1.4) ∄ f´(2) 1.5) ∄ f´(3)

2.1) $f'(x) = -\frac{1}{(x+2)^2}$ 2.2) a = -2 e b = -1

3.1) *f ´(x) = senx + x cosx* 3.2) $f'(x) = \frac{x^{-2/3}}{3}(x^2 - 3x + 2) + x^{1/3}(2x - 3)$

3.3) $f'(x) = sen^2 x(3\cos^2 x - sen^2 x)$ 3.4) $f'(x) = e^x \cos\sec x(1-\cot gx) + \frac{2}{x^3}$

3.5) $f'(x) = \cos x(\sqrt[3]{x^2} - \frac{3}{x^4}) + senx(\frac{2}{3\sqrt[3]{x}} + \frac{12}{x^5})$ 3.6) $f'(x) = \frac{tgx + 2x\sec^2 x}{2\sqrt{x}}$

3.7) $f'(x) = \frac{3x^2 - 10x}{(3x-5)^2}$ 3.8) $f'(x) = -\frac{(xsenx + \cos x)}{x^3}$

3.9) $f'(x) = \frac{(2x-8)\cos x - 2senx}{(2x-8)^2}$ 3.10) *f ´(x) = -cossecx cotgx*

3.11) $f'(x) = \frac{(tgx + x\sec^2 x)(2-\cos x) - xtgxsenx}{(2-cox)^2}$

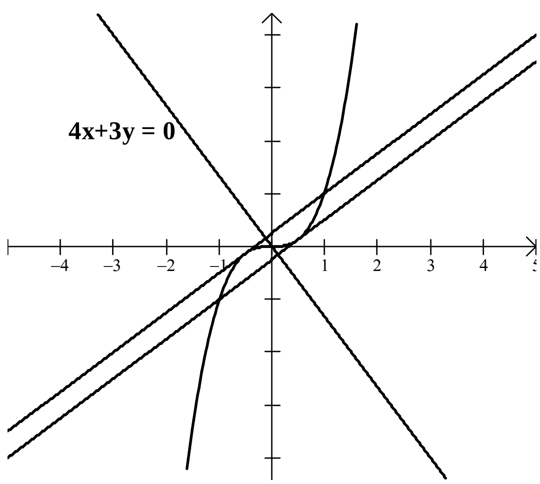
3.12) $f'(x) = (\frac{xsenx}{x+1})^4 (\frac{(senx + x\cos x)(x+1) - xsenx}{(x+1)^2})$

3.13) $f'(x) = \frac{(sen^2 x + xsen2x + 3^x \ln 3)(x^3 - 4x^2 + 1) - (xsen^2 x + 3^x)(3x^2 - 8x)}{(x^3 - 4x^2 + 1)^2}$

4.1) y - 5 = $-\frac{2}{5}$ (x + 4) 4.2) y – 13 = 15 (x - 2) 4.3) y – 2 = 6(x – 1)

5) y = x + 3 6) y – 6 = 5 (x – 1) 7) y = –x + $\frac{\pi}{2}$

8.1)



8.2) y = $\frac{3}{4}$x – $\frac{1}{4}$, y = $\frac{3}{4}$x + $\frac{1}{4}$

9)

a) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{x^2+1} - \dfrac{x\log(1-2x)}{|x|\sqrt{1-x^2}} - \dfrac{2\,\text{arcsen}\sqrt{1-x^2}}{(1-2x)\ln 10}$.

b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{e^{\log_3 x}}{x\ln 3} + \dfrac{\text{sen}\,x\ \cos(\cos x)}{3\sqrt[3]{\text{sen}^2(\cos x)}}$.

c) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{e^x\cos(e^x)}{\sqrt{1-\text{sen}^2(e^x)}} + 2\,x\,arctg\,(2x^2+2) + \dfrac{4x^3}{4x^4+8x^2+5}$.

d) $f'(0) = \dfrac{\sqrt{3}}{14}$. e) $f'(3) = 2$. f) $f'(0) = -\dfrac{1}{5}$. g) $f'(1) = \dfrac{\pi}{2}$. h) $w'(0) = -\dfrac{2}{3}$.

i) $f'(x) = (arctg\,2x)^{(x^2+4x)}\left[(2x+4)\ln(arctg\,2x) + 2\dfrac{(x^2+4x)}{(1+4x^2)arctg\,2x}\right]$

j) $g'(x) = \dfrac{(3(arcsen x)^2+2)}{\sqrt{1-x^2}}$

10). a) $(f^{-1})'(f(x)) = \dfrac{[2+\cos(2x)]^2}{2[2\cos(2x)+1]}$.

b) $a_t = (f^{-1})'(1) = \dfrac{1}{f'(0)} = \dfrac{1}{2\ln 3}$; $(f^{-1})'(f(x)) = \dfrac{1+4x^2}{2\ \ln 3\ 3^{arctg(2x)} + 2x + 8x^3}$.

c) $g'(f(1)) = \dfrac{1}{2\ (1-\ln 2)}$; $g'(f(x)) = \dfrac{1}{2x - 2^x\ln 2}$.

d) $(f^{-1})'(5) = \dfrac{1}{f'(-2)} = \dfrac{1}{8}$; $(f^{-1})'(f(x)) = \dfrac{1}{3x^2-4}$.

e) $(f^{-1})'(1) = \dfrac{1}{f'(-2)} = 4$; $(f^{-1})'(f(x)) = \dfrac{-x^3}{(x+4)\ e^{(x+2)/x^2}}$.

f) $\left(f^{-1}\right)(0) = \dfrac{1}{f'(-1)} = \dfrac{1}{3arctg(\sqrt[3]{2})}$

11) a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{(y+1)\,e^y}{1-(y+1)\,x\,e^y}$ b) $\dfrac{dx}{dy} = -\dfrac{x+3y^2}{y+3x^2}$ c) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4\,x\sqrt{\text{sen}\,y}}{4\,y\sqrt{\text{sen}\,y} - \cos y}$.

d) $y'_P = 6$ e) $y'_P = -2\pi$. f) $\dfrac{dy}{dx}(1,1) = -4e - \dfrac{\pi}{2}$ g) $\dfrac{dy}{dx}(0,0) = \dfrac{1}{2}$

12 a) $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{(x=-1/2)} = \sqrt{3}$ b) $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{1}{t(1-t^2)}$ c) $\dfrac{d^2y}{dx^2} = -\dfrac{1}{(1-\cos t)^2}$

13) a) $t:\ y-2=-\frac{3\sqrt{5}}{4}(x-\frac{2\sqrt{5}}{3})$; $y'=-\frac{9x}{4y}$.

b) $t: y-3=-\frac{250}{27}(x-\frac{1}{5})$; $(f^{-1})'(f(x))=-\frac{2\sqrt{(x^3-2)^3}}{3x^2}$.

c) $\mathrm{n}: \mathrm{y}+\mathrm{x}+1=0$; $y'=-\frac{x+y}{x+3y}$ e $\mathrm{y}'_{\mathrm{P}}=1$.

d) $t: y-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(x-\frac{5}{2})$; $y'=\frac{x-y}{x+3y}$.

e) $y=\frac{1}{3\ln 2}(x-1)$ f) $y+2=-\frac{1}{4}(x-1)$ g) $y-1=(x-\frac{\pi}{2}+1)$

14) a) $\frac{49}{\sqrt{34}}\,m/s$ b) 1/82 rd/s c) 32/3 m^2/h