UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
MAT A02– CÁLCULO A (atualizada em 2009.1)

LISTA DE EXERCÍCIOS(Questões de Provas I^a UNIDADE)

Limite

1) (2000 – 1) Considere a função de domínio *IR*, definida por $f(x)=\begin{cases} x^2, & x<-1 \\ -x+1, & -1\le x<1 \\ \log x, & x\ge 1\end{cases}$.

1.1) Esboce o gráfico de f.
1.2) Determine se existirem: $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

2) (2000 – 1) Considerando $f(x)=\dfrac{x^2+|x|}{x}$, analise qual o domínio em que $f(x)$ define uma função, esboce o gráfico desta função no seu domínio de definição, e determine, se existirem, os limites $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

3) Calcule, se existirem, os seguintes limites:

3.1) (2000 – 1) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{tgx}$

3.2) (1999 – 1) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x+3}{|x-3|-6}$

3.3) (2000 – 1) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-7x+6}{x^3-3x+2}$

3.4) (1999 – 2) $\lim\limits_{x\to 1^+} \left[\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{1}{1-x^3}\right]$

3.5) (1999 – 2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$

3.6) (2000 – 1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{9+x}-3}{x}$

3.7) (2000 – 1) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2}}{3x^2-3x}$

3.8) (1999 – 2) $\lim\limits_{x\to +\infty} (x-\sqrt{x^2+1})$

3.9) (1999 – 2) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left[\ln(\sqrt{x^2+2}+x)\right]$

3.10) (1999 – 2) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-3}}{\sqrt[3]{x^3+1}}$

3.11) (2000 – 1) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt[3]{9-x^6}}{x^3+1}$

3.12) (1999 – 1) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-3}}{\sqrt[3]{8x^3+1}}$

3.13) (1999 – 2) $\lim\limits_{x\to -5^+} \dfrac{5-x}{x^2+x-20}$

3.14) (1999 – 2) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{2^x-1}{x^3-x}$

3.15) (2000 – 1) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt{3x^2+x}-2}{x^3+1}$

3.16) (2000 – 1) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$

3.17) (1999 – 1) $\lim_{x\to 0} \dfrac{tg^2 x+\text{sen}^2\, x}{x\,\text{sen}\, x}$

3.18) (2000 – 1) $\lim_{x\to 0} \dfrac{tgx-\text{sen}\, x}{x^3}$

3.19) (1999 – 1) $\lim_{x\to \pi} \dfrac{\text{sen}\, x}{x-\pi}$

3.20) (2000 – 1) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{\cos x}{x}$

3.21) (2000 – 1) $\lim_{x\to 0^+} \left[\dfrac{1}{\ln x}\,\text{sen}\,\dfrac{1}{x}\right]$

3.22) (1999 – 2) $\lim_{x\to +\infty} \left(\pi^{\left(\frac{2-x^2}{1+x}\right)} \cos(\ln x)\right)$

3.23) (1999 – 2) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{\text{sen}\,(x+2)}{\sqrt[3]{x^2+2}+\sqrt[3]{x^2}}$

3.24) (2005 – 2) $\lim_{x\to +\infty} 2^{x(\sqrt{x^2+4}-x)}$

3.25) (2005 – 2) $\lim_{x\to 1}\left(\dfrac{2(x-1)}{sen(\pi x)}\right)^2$

3.26)(2006 – 1) $\lim_{x\to \pi}\left(\dfrac{\cos(\frac{x}{2})}{\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2}}\right)$

3.27) (2006 – 1) $\lim_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x}}{x^3-8}$

3.28) (2008 – 1) $\lim_{x\to +\infty}\left[2^{\left(\frac{sen(x^4)}{x^4}\right)}+\left(\dfrac{3x^3+4x-8}{x^2-4x+6}\right)\right]$

3.29) (2008 – 1) $\lim_{x\to -3^+}\left(\dfrac{\sqrt{x^2-x-3}-6}{|\,x\,|-3}\right)$

Continuidade

Seja $x_o \in D(f)$**.**
f ***é contínua em*** $\boldsymbol{x_o}$***, se e somente se, existe*** $\lim_{x\to x_o} f(x)$ ***e*** $\lim_{x\to xo} f(x)=f(x_o)$

4) Verifique, justificando, se f é contínua em $x = x_o$.

1.3) (1999 – 2) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$; x_o =0.

1.4) (1999 – 2) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\text{sen}\, x}{x}, & x<0\\ \cos x, & x\geq 0 \text{ e } x\neq\pi\\ 1, & x=\pi\end{cases}$; x_o =0.

1.5) (2000 – 1) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\text{sen}\,(x+3)}{x^2-9}, & x > -3 \\ 1/2, & x = -3 \\ \dfrac{\cos(\pi\, x)}{6}, & x < -3 \end{cases}$; $x_o = -3$.

4.4) (2006 – 1) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - x^2 - 10x - 8}{x^2 - 2x - 3}, \text{se } x < 3 \text{ e } x \neq -1 \\ \frac{5}{4}, \text{ se } x = -1 \\ (x-6)\ln(x-3), \text{ se } x > 3 \\ 2, \text{se } x = 3 \end{cases}$; $x_0 = -1$ e $x_0 = 3$.

5) Determine, se possível, as constantes de modo que

1.6) (1999 – 2) $\lim\limits_{x \to 6} \dfrac{x^2 + ax + b}{x - 6} = 8$.

1.7) (1999 – 1) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + ax + b}{x+1}, & x < -1 \\ c, & x = -1 \\ x^2 + 5x, & x > -1 \end{cases}$ seja contínua em $x_o = -1$.

1.8) (2000 – 1) $f(x) = \begin{cases} 3x - 2, & x > 1 \\ ax, & x = 1 \\ 5b - ax, & x < 1 \end{cases}$ seja contínua em $x_o = 1$.

1.9) (2000 – 1) $f(x) = \begin{cases} mx^3 - 1, & x < 1 \text{ e } x \neq 0 \\ x^2 - m, & x \geq 1 \\ n - m, & x = 0 \end{cases}$ seja contínua em $x_o = 0$ e $x_1 = 1$.

1.10) (1999 – 2) $f(x) = \begin{cases} e^{2x} - 1, & x < 0 \\ 2x + a, & 0 \leq x \leq 2 \\ \dfrac{x^2 - b}{x - 2}, & x > 2 \end{cases}$ seja contínua em $x_o = 0$ e $x_1 = 2$.

1.11) (2008 – 1) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x+1}}{ax}, \text{se } x \neq 0 \\ -1/4, x = 0 \end{cases}$ seja contínua em $x_o = 0$.

1.12) (2005 – 2) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3$ e f(4/3) = 0, sendo $f(x) = \dfrac{ax^2 + bx}{(x-c)^2}$, para x $\neq$ c.

5.8) (2008 – 2) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ e f seja contínua em x = -1, sendo $f(x) = \begin{cases} \dfrac{ax^2 + bx + c}{x^2 + 4x + 3}, \text{ se } x > -1 \\ x^2 - 4, \quad \text{se } x \leq -1 \end{cases}$.

Derivada

Se existir $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ ***(finito), então*** $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.
Sendo $f'(x_0)$ ***a derivada de*** f ***no ponto de abscissa*** x_0.

6.1) Usando a definição de **derivada no ponto**, calcule as derivadas indicadas:
a) (1999 – 1) $f'(2)$, sendo $f(x) = |x - 3|$.

b) (1999 – 2) $f'(2)$, sendo $f(x) = \sqrt{x^2 + x}$.

c) (2000 – 1) $f'(4)$, sendo $f(x) = \sqrt{x}, x \geq 0$.

6.2) <u>Usando a definição</u>, verifique se a função:

a) (2005 – 2) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{3x} - 1, x \geq 3 \\ \dfrac{x^2}{3} - 1, x < 3 \end{cases}$ é derivável em $x_0 = 3$.

b) (2008 – 2) $f(x) = \begin{cases} (x-1)^3, \ x > 0 \\ x^2 + 3x - 1, x \leq 0 \end{cases}$ é derivável em $x_o = 0$.

6.3) (1999 – 2) Usando a definição de derivada, calcule a derivada da função $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$.

6.4) (2006 – 1) Determine as constantes a e b de modo que exista f ´(-1), sendo

$f(x) = \begin{cases} x^2, \ x < -1 \\ ax + b, x \geq -1 \end{cases}$. (use a definição de derivada)

7) Usando as regras de derivação, calcule as derivadas das seguintes funções:

7.1) (2000 – 1) $f(x) = x \operatorname{sen} x$

7.2) (1999 – 2) $f(x) = x^{1/3}(x^2 - 3x + 2)$

.3) (1999 – 1) $f(x) = \operatorname{sen}^3 x \cos x$

7.4) (1999 – 2) $f(x) = e^x \operatorname{cossec} x - \dfrac{1}{x^2}$

7.5) (2000 – 1) $f(x) = (\operatorname{sen} x)\ (\sqrt[3]{x^2} - \dfrac{3}{x^4}), x \neq 0$

7.6) (2008 – 2) $f(x) = (x senx - tgx)^4$

7.7) (2000 – 1) $f(x) = \dfrac{x^2}{3x - 5}, x \neq \dfrac{5}{3}$

7.8) (2000 – 1) $f(x) = \dfrac{\cos x}{x^2}, x \neq 0$

7.9) (2000 – 1) $f(x)=\dfrac{\text{sen}\,x}{2x-8}, x\neq 4$

7.10) (1999 – 2) $f(x)=\dfrac{1+\sec x}{tgx+\text{sen}\,x}$

7.11) (2000 – 1) $f(x)=\dfrac{x.tgx}{2-\cos x}$

7.12) (1999 – 2) $f(x)=\left(\dfrac{x\,\text{sen}\,x}{x+1}\right)^5, x\neq -1$

7.13) (1999 – 2) $f(x)=\dfrac{x\,\text{sen}^2\,x+3^x}{x^3-4x^2+1}$

7.14) (2008 –1) $f(x)=\dfrac{\sqrt[4]{x}+\cos(x)}{3x+2}$

Reta Tangente

A equação da reta tangente ao gráfico f no ponto de abscissa x_0 é dada por
" $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$ "
se f for derivável no ponto x_0.

8) Determine as equações das retas tangentes ao gráfico de f no ponto de abscissa x_0:

8.1) (1999 – 1) $f(x)=\sqrt{9-4x}$, em $x_0=-4$.

8.2) (2000 – 1) $f(x)=x^3+3x-1$, em $x_0=2$.

8.3) (1999 – 2) $f(x)=6\sqrt[3]{x^2}-\dfrac{4}{\sqrt{x}}$, em $x_0=1$.

9) (2000 – 1) Ache as coordenadas do ponto P de abscissa negativa e pertencente à curva $y=x^3-2x+1,\ x\in\Re$, tais que a reta tangente nesse ponto tenha ângulo de inclinação de 45°.

10) (1999 – 2) Determine a equação da reta tangente ao gráfico de f, definida por $f(x)=x^2+3x+2$, que é paralela à reta $r: y=5x-2$.

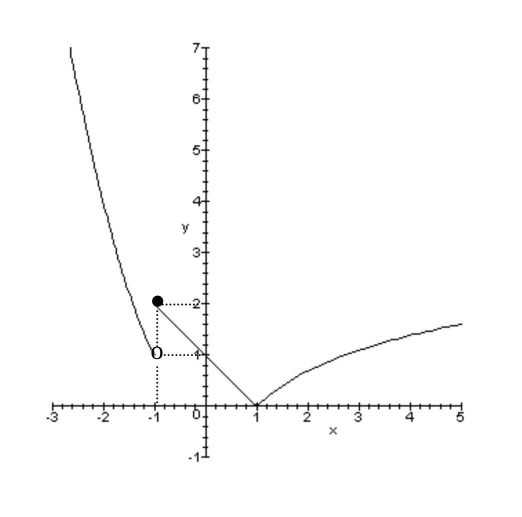
11) (2008 – 2 Determine a constante k, de modo que a reta y = kx – 4 seja tangente ao gráfico da função $f(x) = x^2 + 3x - 4$.

12) (2000 – 1) Considere a função definida em *IR* pela equação $f(x)=x^3$ e a reta $s: 4x+3y=0$.

12.1) Esboce o gráfico da função f e da reta s num mesmo plano de coordenadas cartesianas, e determine, graficamente, a(s) reta(s) tangente(s) ao gráfico de f que é(são) perpendicular(es) à reta s.

12.2) Determine uma equação de uma das retas tangentes encontradas no item anterior, *caso haja mais de uma*.

RESPOSTAS



1. $\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} (x^2) = +\infty$

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} (\log x) = +\infty$

$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} (x^2) = 1$, $\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} (-x+1) = 2$

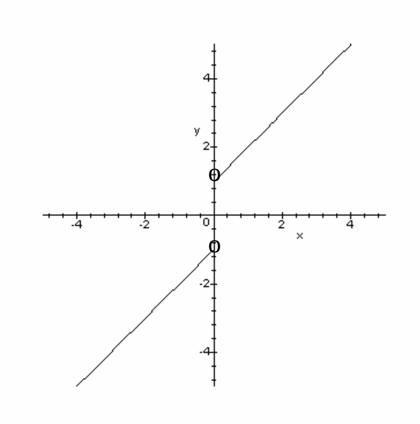
logo $\nexists \lim_{x\to -1} f(x)$

$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} (-x+1) = 1$

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (-x+1) = 0$, $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (\log x) = 0$, logo $\lim_{x\to 1} f(x) = 0$.

2.

Gráfico de $f(x)$:



$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x>0 \\ x-1, & x<0 \end{cases}$$

$D(f) = IR^*$;

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (x-1) = -1$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (x+1) = +1$,

logo $\nexists \lim_{x\to 0} f(x)$.

3.1) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} tgx = -\infty \Rightarrow \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \left(\frac{1}{2}\right)^{tgx} = +\infty$ e $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} tgx = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \left(\frac{1}{2}\right)^{tgx} = 0$.

Logo $\nexists \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{tgx}$.

3.2) -1.

3.3) $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^2-7x+6}{x^3-3x+2}=+\infty$ e $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^2-7x+6}{x^3-3x+2}=-\infty$, logo $\nexists$ $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-7x+6}{x^3-3x+2}$.

3.4) $-\infty$. 3.5) 1/2 . 3.6) 1/6 . 3.7) $\sqrt{2}/6$. 3.8) 0 .

3.9) $\lim\limits_{x\to -\infty} (\sqrt{x^2+2}+x)=0$, logo $\lim\limits_{x\to -\infty} \ln(\sqrt{x^2+2}+x)=-\infty$.

3.10) 1 . 3.11) 0 . 3.12) 1/2 . 3.13) $-\infty$.

3.14) $\lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{2^x-1}{x^3-x}=+\infty$ e $\lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{2^x-1}{x^3-x}=-\infty$, logo $\nexists$ $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{2^x-1}{x^3-x}$.

3.15) $\lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{\sqrt{3x^2+x-2}}{x^3+1}=+\infty$ e $\lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{\sqrt{3x^2+x-2}}{x^3+1}=-\infty$, logo $\nexists$ $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt{3x^2+x-2}}{\left|x^3+1\right|}$.

3.16) 1/2 3.17) 2 3.18) ½ 3.19) -1 3.20) 0

3.21) 0 3.22) 0 3.23) 0 3.24) 2 3.25) $\dfrac{4}{\pi^2}$

3.26) -1 3.27) $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x}}{x^3-8}=-\infty$ e $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x}}{x^3-8}=+\infty$, logo $\nexists \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x}}{x^3-8}$. 3.28) $+\infty$ 3.29) $+\infty$

4.1) não 4.2) sim 4.3) não 4.4) x_0 = - 1 sim, x_0 =3 não

5.1) a = - 4, b = -12 5.2) a = -2, b = -3, c = -4 5.3) a = 1, b = 2/5

5.4) m = 1, n = 0 5.5) a = 0, b = 4 5.6) a = 2

5.7) a = 3, b = - 4 e c = 1 5.8) a = 1, b = -4 e c = -5

6.1a) -1 6.1b) $\dfrac{5}{2\sqrt{6}}$ 6.1c) 1/4

6.2a) $\nexists$ f´(3) 6.2b) f´(0) = 3 6.3) $f'(x)=-\dfrac{1}{(x+2)^2}$ 6.4) a = -2 e b = -1

7.1) *f ´(x) = senx + x cosx* 7.2) $f'(x)=x^{-2/3}(x^2-3x+2)+x^{1/3}(2x-3)$

7.3) $f'(x)=sen^2x(3\cos^2 x-sen^2x)$ 7.4) $f'(x)=e^x \cos\sec x(1-\cot gx)+\dfrac{2}{x^3}$

7.5) $f'(x) = \cos x(\sqrt[3]{x^2} - \frac{3}{x^4}) + senx(\frac{2}{3\sqrt[3]{x}} + \frac{12}{x^5})$

7.6) $f'(x) = 4(xsen(x) - tg(x))^3 (sen(x) + x\cos(x) - \sec^2(x))$

7.7) $f'(x) = \frac{3x^2 - 10x}{(3x-5)^2}$ 7.8) $f'(x) = -\frac{(xsenx + \cos x)}{2x^3}$

7.9) $f'(x) = \frac{(2x-8)\cos x - 2senx}{(2x-8)^2}$ 7.10) *f ´(x) = -cossecx cotgx*

7.11) $f'(x) = \frac{(tgx + x\sec^2 x)(2-\cos x) - xtgxsenx}{(2-cox)^2}$

7.12) $f'(x) = (\frac{xsenx}{x+1})^4 (\frac{(senx + x\cos x)(x+1) - xsenx}{(x+1)^2})$

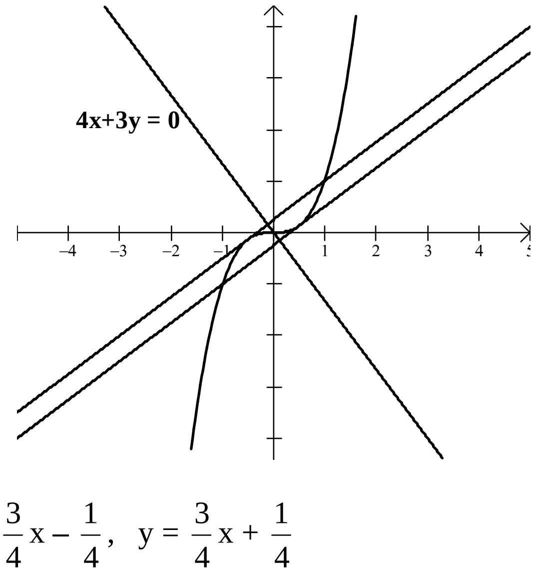
7.13) $f'(x) = \frac{(sen^2 x + xsen2x + 3^x \ln 3)(x^3 - 4x^2 + 1) - (xsen^2 x + 3^x)(3x^2 - 8x)}{(x^3 - 4x^2 + 1)^2}$

7.14) $f'(x) = \frac{\left((1/4)x^{(-3/4)} - sen(x)\right)(3x+2) - 3(x^{(1/4)}\cos(x))}{(3x+2)^2}$

8.1) y - 5 = $-\frac{2}{5}$ (x + 4) 8.2) y – 13 = 15 (x - 2) 8.3) y – 2 = 8(x – 1)

9) y = x + 3 10) y – 6 = 5 (x – 1) 11) k = 3

12.1)



12.2) y = $\frac{3}{4}$x – $\frac{1}{4}$, y = $\frac{3}{4}$x + $\frac{1}{4}$