INSTITUTO DE MATEMÁTICA DA UFBA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CÁLCULO A

2008.2

1ᴬ LISTA DE EXERCÍCIOS

01. Esboce o gráfico de *f*, determine $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ e, caso exista, $\lim\limits_{x\to a} f(x)$:

$a)\ f(x)=\begin{cases}3x-2, & x>1\\ 2\ \ , & x=1\\ 4x+1, & x<1\end{cases}\quad (a=1)$

$b)\ f(x)=\begin{cases}x^2-1, & x\ge 1\, e\, x\ne 2\\ 1\ \ , & x=2\\ 1-x\,, & x<1\end{cases}\quad (a=2)$

$c)\ f(x)=\begin{cases}x^2-x, & x\ge 0\\ -x\ \ , & x<0\end{cases}\quad (a=0)$

$d)\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+2}{|x+2|}, & x\ne -2\\ 0, & x=-2\end{cases}\quad$ (a = - 2)

02. Determine, se possível, $a\in$ R, para que exista $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)$, sendo:

$a)\ f(x)=\begin{cases}3x-2, & x>-1\\ 3\ \ , & x=-1\\ 5-a\,x, & x<-1\end{cases}\quad (x_o=-1)$

$b)\ f(x)=\begin{cases}(x^2-4)(x-2)^{-1}, & x\ne 2\\ a & ,x=2\end{cases}\quad (x_o=2)$

03. Considere as funções do exercício 01. Verifique se *f* é contínua em $x = a$. Justifique.

04. Para cada função *f* a seguir, determine D(*f*) e, se possível, a função g: R ? R, tal que g é contínua e *g(x) = f(x)*, para todo $x\in$ D(*f*):

$a)\ f(x)=\dfrac{x^2-9}{3-x}$

$b)\ f(x)=\begin{cases}3x+1, & x>-2\\ -2x\ , & x<-2\end{cases}$

05. Calcule os limites a seguir,

a) $\lim\limits_{y\to -1}(-y^5-3y^4+12y^2)$

b) $\lim\limits_{w\to 10}(\log w-\ln w)$

c) $\lim\limits_{x\to 1} e^x(x^3-4)$

d) $\lim\limits_{x\to p/2}\dfrac{senx}{1+\cos x}$

e) $\lim\limits_{x\to 2}\left|\dfrac{x^2-4}{2-x}\right|$

f) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{|x-1|}$

g) $\lim\limits_{x\to 1/2}\dfrac{2x^2+3x-2}{8x^3-1}$

h) $\lim\limits_{x\to 2} e^{(x^4-16)(x^3-8)^{-1}}$

i) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

j) $\lim\limits_{y\to -1}\dfrac{1-y^2}{y+\sqrt{2+y}}$

k) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$

l) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x-4}}$

m) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8}$

n) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{3x+5}-2}{x^2-1}$

06. Determine, se possível, as constantes a, b e $c\in$ R, de modo que *f* seja contínua em x_0, sendo:

$$a)\ f(x)=\begin{cases} bx^2+2, & x\neq 1 \\ b^2, & x=1 \end{cases} \quad (x_0=1) \qquad b)\ f(x)=\begin{cases} 3x-3, & x>-3 \\ ax, & x=-3 \\ bx^2+1, & x<-3 \end{cases} \quad (x_0=-3)$$

07. Esboce o gráfico de cada função f a seguir, e determine o que se pede:

$$a)\ f(x)=\begin{cases} \ln x, & x>0 \\ e^x, & x\leq 0 \end{cases}$$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x),\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x),\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x),\ \lim\limits_{x\to 0} f(x),\ \lim\limits_{x\to 1} f(x),\ \lim\limits_{x\to -1} f(x),\ \lim\limits_{x\to e} f(x),\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
- intervalos onde f é contínua.

$$b)\ f(x)=\begin{cases} (1/2)^x, & x>0 \\ 1/x, & x<0 \end{cases}$$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x),\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x),\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x),\ \lim\limits_{x\to 0} f(x),\ \lim\limits_{x\to 1} f(x),\ \lim\limits_{x\to -1} f(x),\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$$c)\ f(x)=\begin{cases} \log_{1/2} x, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ x^{-2}, & x<0 \end{cases}$$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x),\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x),\ \lim\limits_{x\to 0} f(x),\ \lim\limits_{x\to 1} f(x)$
- estude a continuidade de f em $x=0$.

$$d)\ f(x)=\begin{cases} x^4, & x\leq 0 \\ \cot g\, x, & 0<x<p \\ x+p, & x\geq p \end{cases}$$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x),\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x),\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x),\ \lim\limits_{x\to 0} f(x),\ \lim\limits_{x\to p/2} f(x),\ \lim\limits_{x\to p^-} f(x),\ \lim\limits_{x\to p^+} f(x),\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
- ponto(s) de descontinuidade de f.

08. Calcule:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x^5+4x^2-3)$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty}(4x^3-2x^2+x-5)$ c) $\lim\limits_{x\to-\infty}(-5e^x)$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{5x^2+x+2}$ e) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-3x}+x)$ f) $\lim\limits_{x\to 0^+}(x^2+\ln x)$

g) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{1+2^{1/x}}$ h) $\lim\limits_{x\to 2^-}\ln(2-x)$ i) $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{p}{2+3^{\frac{1}{x-1}}}$

09. Calcule os seguintes limites:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+1}{sen\,x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2}$ c) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x^2+3}{(x-5)^2}$

d) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{5x-4}{|x-2|}$ e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x}{x}$ f) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{3x-11}{|x|-3}$

g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{3}}{x^4}$

10. Calcule os limites a seguir:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2-4x-25}{18x^3-9x^2}$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} sen\dfrac{2+x-p\,x^2}{12x-4x^2}$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty} (1/p)^{x^3(x^2-1)^{-1}}$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} [x\ln 2-\ln(3^x+1)]$ e) $\lim\limits_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2-3x}+x)$ f) $\lim\limits_{x\to+\infty} [x(\sqrt{x^2-1}-x)]$

11. Calcule as constantes de modo que:

a) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-ax+b}{x-3}=5$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[ax-\dfrac{bx+3}{x+1}\right]=5$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$ e $\lim\limits_{x\to-2} f(x)=1$, sendo $f(x)=\dfrac{ax^3+bx^2+cx+d}{4(x^2+x-2)}$

d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{b\sqrt{x+3}-a}{x-1}=1/6$ e) $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{2\sqrt{x^2+8}-b}{x+1}=-2/3$

f) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-ax+9}{x-3} & ,x<-3 \\ bx & ,x=-3 \\ 3x+1 & ,x>-3 \end{cases}$ seja contínua em $x_0=-3$

12 Calcule os seguintes limites:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{sen\,ax}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{tg\,ax}{bx}$, com $a, b \neq 0$ c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$ d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{tgx-sen\,x}{sen^2\,x}$

e) $\lim\limits_{x\to p} \dfrac{sen\,x}{x-p}$ f) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{senx-sena}{x-a}$ g) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\cos x-\cos a}{x-a}$.

13 Calcule os limites a seguir:

a) $\lim\limits_{x\to 0} [x\ sen(1/x)]$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty} [e^x . sen\,x]$ c) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left[x^3(4-\cos x^{-2})+\dfrac{e^x}{x}\right]$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[\dfrac{2+5x^3}{1-3x^7}\cos(\ln x)\right]$ e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[sen\left(\dfrac{x^2+x+1}{1+2x}\right).\cos\left(\dfrac{px^3+x^2-3}{2-x+2x^3}\right)\right]$

14. Considere a função $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3-x}{x^2-3x+2}, & x<2 \text{ e } x\neq 1 \\ -2 & ,x=1 \\ 10 & ,x=5 \\ x\ln|x-5| & ,x\geq 2 \text{ e } x\neq 5 \end{cases}$. Justificando, estude a continuidade de *f*.

15. Usando a definição, verifique se as funções a seguir são deriváveis em x_0 e em caso afirmativo, determine $f'(x_0)$:

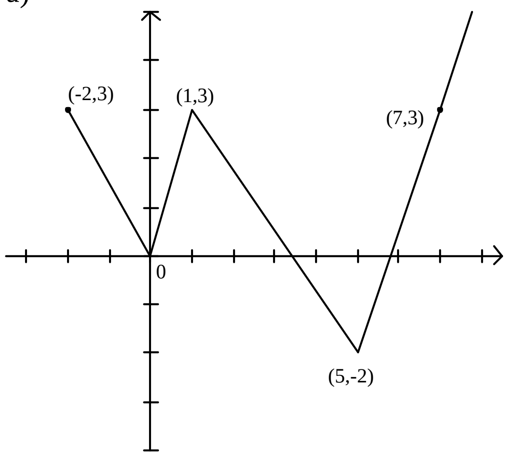
a) $f(x) = \begin{cases} -3x, x \le 2 \\ x-8, x > 2 \end{cases}$ $(x_0 = 2)$ b) $f(x) = x^2\,|x|$ $(x_0 = 0)$ c) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ $(x_0 = 0)$

d) $f(x) = 2x^3 + 2$ $(x_0 = 2)$ e) $f(x) = x^n$, $n \in N^*$ $(x_0 \in R)$

16. Verifique em que ponto(s) a função $f(x) = |x^2 - 1|$ não é derivável. Justifique sua resposta.

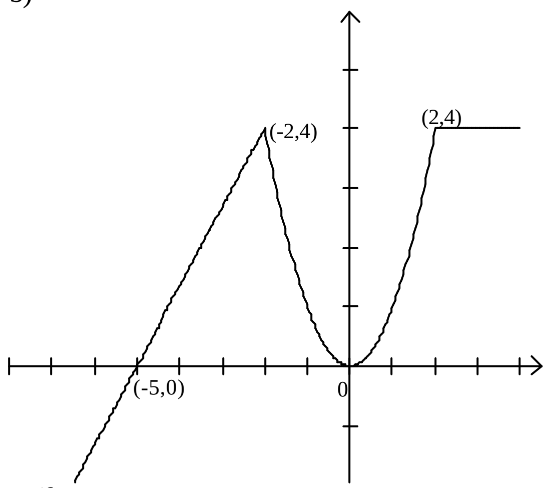
17. Esboce o gráfico de f' sabendo que f é dada pelo gráfico:

a)



$D(f) = [-2, +8)$

b)



$D(f) = R$

obs: No intervalo $[-2,2]$, $f(x) = x^2$

18. Determine as constantes a e b de modo que f seja derivável em $x = 1$, sendo $f(x) = \begin{cases} ax^2 + b, x \le 1 \\ x^{-1} \quad , x > 1 \end{cases}$.

19. Determine as derivadas das funções a seguir:

a) $y = 2x^4 - 3x^2 + x - 3$ b) $x = \dfrac{2(2z-1)}{\sqrt{3}}$ c) $w = \dfrac{3}{4y} + 2y\left(\sqrt[3]{y^2}\right) + \dfrac{3}{\sqrt{y}}$

d) $u = \dfrac{t+5}{t-7}$ e) $y = \dfrac{-5}{6x^3 - 1} + x^3.\ln\sqrt{p}$ f) $y = x^{2/3}(2x^{1/3} - 1)$

g) $y = 2^x(x^3 + x + 1)$

20. Determine a derivada de cada uma das funções a seguir:

a) $y = (-2/5)\mathit{senx} + 9\sec x$ b) $y = x\,\mathit{senx} + \cos x$ c) $f(x) = 2\mathit{senx}\cos x + 8\mathit{tgx}\sec x$

d) $g(t) = \dfrac{tg\,t - 1}{\sec t}$ e) $g(x) = \dfrac{\mathit{sen}\,x + \cos x}{\mathit{sen}x - \cos x}$ f) $y = \dfrac{e^x}{\mathit{senx}}$

21. Determine as equações das retas tangente e normal ao gráfico de f no ponto de abscissa x_0:

a) $f(x) = 2x^3 + 3x - 1$; $x_0 = 1$ b) $f(x) = tg\,x$; $x_0 = p/4$ c) $f(x) = \mathit{cossec}\,x$; $x_0 = p/2$

22. Determine as abscissas dos pontos do gráfico de $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x$ nos quais a reta tangente é:

a) horizontal b) paralela à reta $2y + 8x - 5 = 0$

23. Em que ponto da curva $y = 2 + x^2$ a reta tangente tem ângulo de inclinação $p/3$?

24. Caso exista, determine o(s) ponto(s) da curva $f(x) = 1/x$, no qual a reta tangente é paralela à:

a) 1ª bissetriz b) 2ª bissetriz

25. Seja $f(x) = b - (x^2/16)$. Determine a constante b de modo que a reta que passa pelos pontos M(0,5) e N(5/2,0) seja tangente ao gráfico de f .

26. Determine a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = x^2 - 3x$ e perpendicular à reta $2y + x = 3$.

27. Determine a equação da reta que passa pelo ponto P(0,2) e é tangente ao gráfico de $f(x) = x^3$. Ilustre a interseção construindo o gráfico.

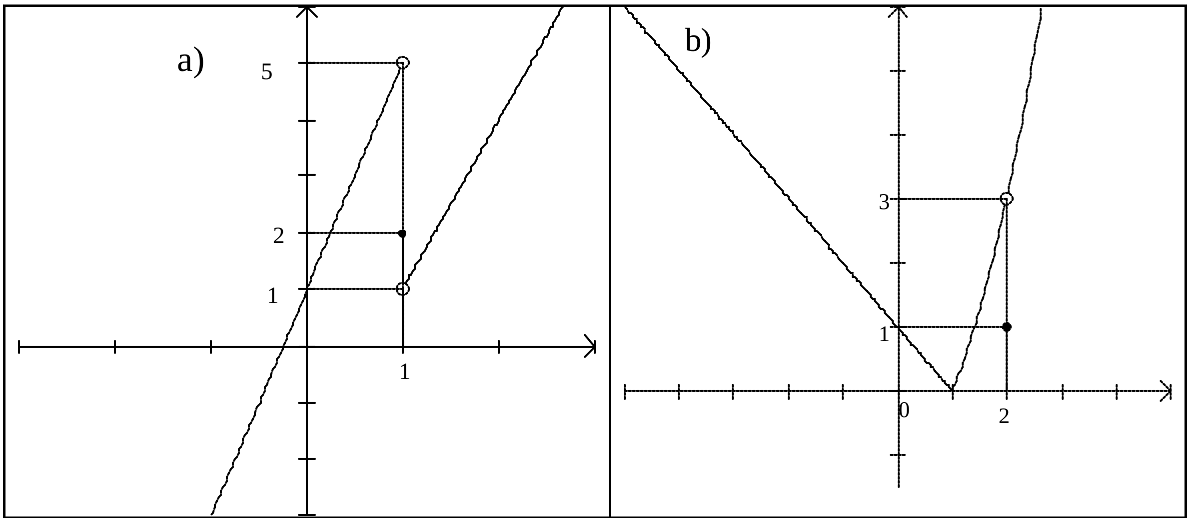
(Observe que o ponto P não pertence ao gráfico da função $f(x) = x^3$)

28. Determine a equação da reta tangente comum aos gráficos de $f(x) = -x^2$ e de $g(x) = x^2 + (1/2)$.

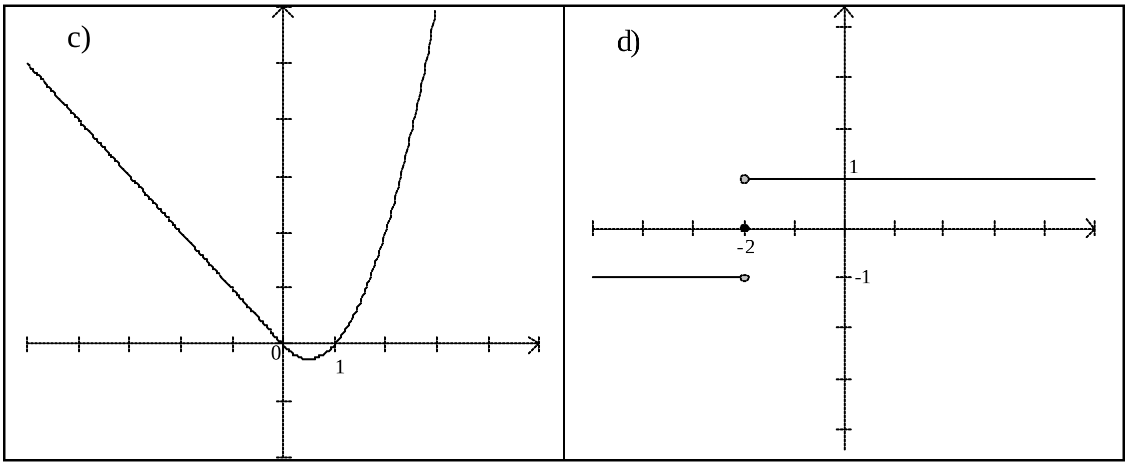
29. Determine $f'(x)$ supondo g e h deriváveis e $f(x) = \dfrac{(xh(x))^3}{g(x)}$, $g(x)$? 0

RESPOSTAS DA 1ª LISTA

01)



$\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = 5,\ \lim\limits_{x\to1^+} f(x) = 1, \nexists \lim\limits_{x\to1} f(x)$ $\lim\limits_{x\to2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to2} f(x) = 3$



$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$	$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -1,\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 1, \nexists \lim\limits_{x\to 2} f(x)$

02. a) -10; b) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ existe, independente do valor de *a*. Por isso *a* pode ser um número real qualquer.

03. a) Não é contínua em $x = 1$ pois não existe $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$;

b) Não é contínua em $x = 2$ pois $\lim\limits_{x\to 2} f(x) \neq f(2)$;

c) É contínua em zero pois $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$.

d) Não é contínua em $x = -2$ pois não existe $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$;

04. a) $D(f) = \mathbb{R} - \{3\}$ e $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 9}{3 - x}, & x \neq 3 \\ -6, & x = 3 \end{cases}$;

b) $D(f) = \mathbb{R} - \{-2\}$, e não é possível definir $g(-2)$, tal que g seja contínua, pois não existe $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$;

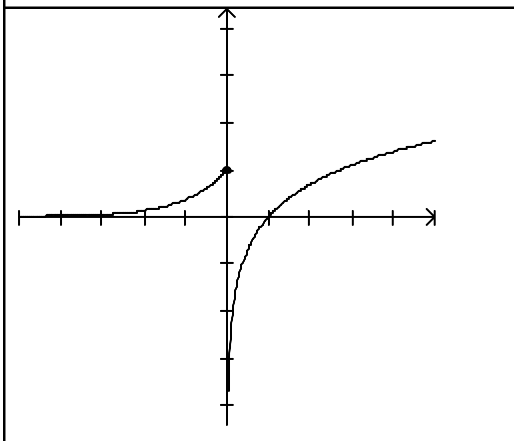
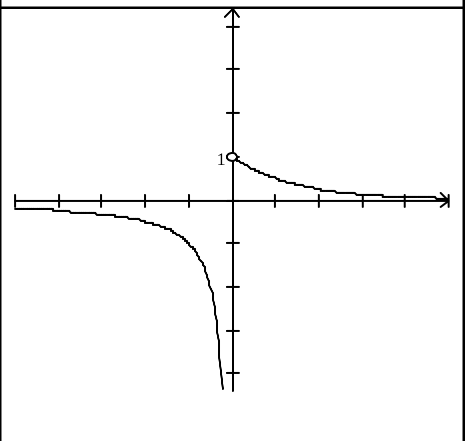
05. a) 10 b) 1- ln10 c) -3e d) 1 e) 4

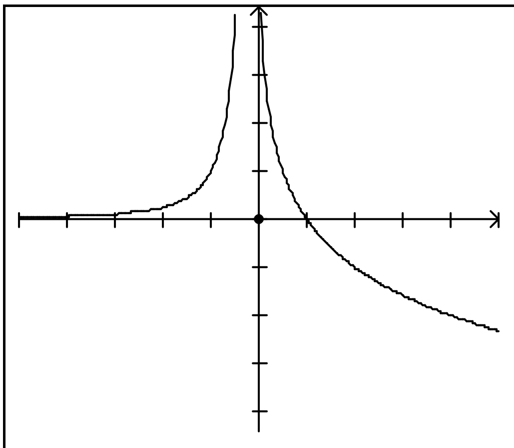
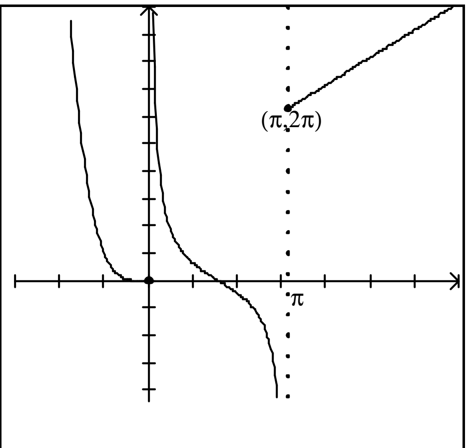
f) não existe pois $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^3 - 1}{|x-1|} = -3$ e $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^3 - 1}{|x-1|} = +3$ g) 5/6; h) $e^{8/3}$;

i) 1/2; j) 4/3; k) -1/3; l) 0;

06. a) b = -1 ou b = 2; b) a = 4 e b = -13/9

07)

a)	b)
	
0, 1, -∞, não existe, 0, 1/e, 1, +∞, (-∞,0), (0,+∞)	0, -∞, 1, não existe, 1/2, -1, 0
c)	d)

	
0, -∞, +∞, 0, não é contínua em zero porque $\lim\limits_{x \to 0} f(x) \neq f(0)$	+∞, 0, +∞, não existe, 0, -∞, 2π, +∞; $x = 0$ e $x = \pi$

08. a), d), e) +8 b), f), h) – 8 c) 0 g) 1/2 i) p/2

09. a) Não existe pois $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x^2+1}{sen\,x} = -\infty$ e $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x^2+1}{sen\,x} = +\infty$ b) – 8 c) + 8

d) + 8 e) Não existe pois $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{\cos 3x}{x} = -\infty$ e $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\cos 3x}{x} = +\infty$

f) Não existe, pois $\lim\limits_{x \to -3^-} \dfrac{3x-11}{|x|-3} = -\infty$ e $\lim\limits_{x \to -3^+} \dfrac{3x-11}{|x|-3} = +\infty$ g) – 8

10. a),c) 0; b) $\sqrt{2}/2$; d) – 8 e) 3/2 f) – ½

11. a) $a = 1$, $b = -6$; b) $a = 0$, $b = -5$; c) $a = 0$, $b = 12$, $c = 36$, $d = 24$
d) $a = 4/3$, $b = 2/3$; e) $b = 6$; f) $a = 10$, $b = 8/3$.

12.a) a b) a/b c) 1/2 d) 0 e) –1 f) cos a g) – sen a.

13.) , b) , d) , e) zero; c) +∞ .

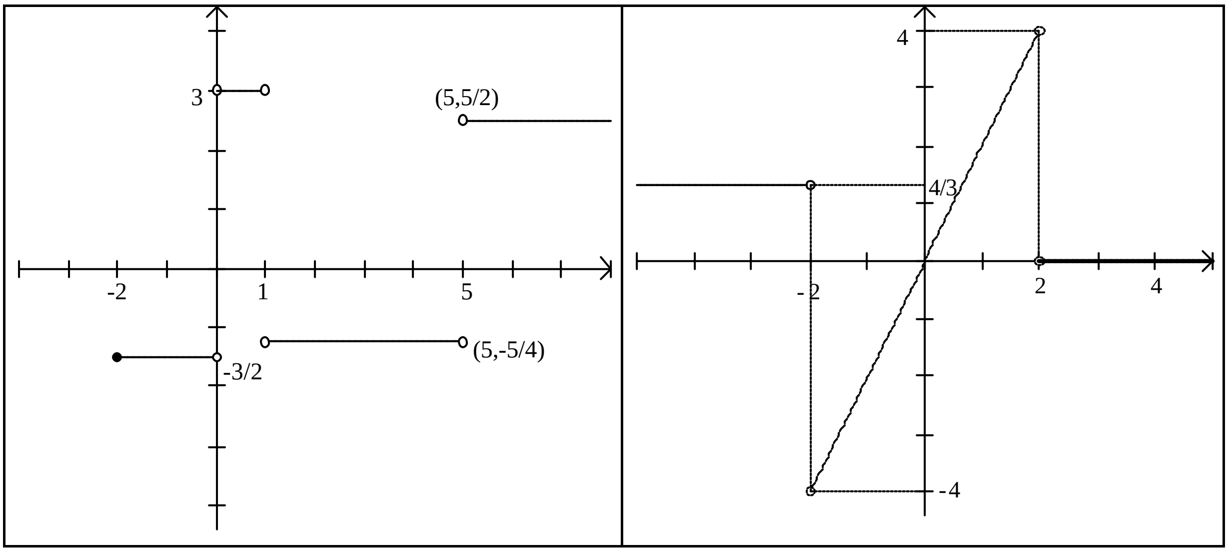
14. f é contínua $\forall x \in IR - \{2, 5\}$;

15. a) não existe; b) zero; c) não existe; d) 24; e) $nx_o^{\,n-1}$

16. f não é derivável em –1 e em +1

17.

a)	b)



18. a = -1/2, b = 3/2

19. a) $y' = 8x^3 - 6x + 1$; b) $x' = 4/\sqrt{3}$; c) $w' = -\dfrac{3}{4y^2} + \dfrac{10}{3}\left(\sqrt[3]{y^2}\right) - \dfrac{3}{2\sqrt{y^3}}$;

d) $u' = -\dfrac{12}{(t-7)^2}$; e) $y' = \dfrac{90x^2}{(6x^3-1)^2} + 3x^2\, ln\sqrt{p}$; f) $y' = 2 - \dfrac{2}{3\left(\sqrt[3]{x}\right)}$;

g) $y' = 2^x \ln 2(x^3 + x + 1) + 2^x(3x^2 + 1)$

20. a) $y' = -(2/5)\, cosx + 9\, secx\, tg$ b) $y' = x\, cosx$; c) $f'(x) = 2\, cos2x + 8\, secx\, (2tg^2x + 1)$;

d) $g'(t) = (1 + tgt)\, cost$ e) $g'(x) = -2(senx - cosx)^{-2}$ f) $y' = \dfrac{e^x(senx - \cos x)}{sen^2 x}$

21. a) t: $9x - y - 5 = 0$ e n: $x + 9y - 37 = 0$; b) t: $y - 1 = 2(x - \frac{p}{4})$ e n: $y - 1 = -\frac{1}{2}(x - \frac{p}{4})$;

c) t: y = 1 e n: x = $\pi/2$.

22. a) $x = -2$, $x = 2/3$; b) $x = 0$, $x = -4/3$

23. $(\sqrt{3}/2, 11/4)$

24. a) não existe b) (1,1), (-1,-1);

25. $b = -11$

26. t: $y = 2x - (25/4)$

27. t: $y = 3x + 2$

28. t_1: $y = x + 1/4$, t_2: $y = -x + 1/4$

29. $f'(x) = \dfrac{3x^2h^2(x)[xh'(x) + h(x)]}{g(x)} - \dfrac{g'(x)x^3h^3(x)}{g^2(x)}$