INSTITUTO DE MATEMÁTICA DA UFBA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
MAT AO2 – CÁLCULO A - Prof[a]: Graça Luzia Domiguez Santos

ESTUDO DA VARIAÇÃO DAS FUNÇÕES

Máximos e Mínimos Locais

Definição: Dada uma função f, seja c $\in$ D(f)

i) f possui um *máximo local em c* se existe um intervalo aberto I contendo c, tal que f(c) $\geq$ f(x) para todo x em I $\cap$ D(f).

ii) f possui um *mínimo local em c* se existe um intervalo aberto I contendo c, tal que f(c) $\leq$ f(x) para todo x em I $\cap$ D(f).

iii) Se f possui um máximo ou mínimo local em c, dizemos que f possui um *extremo local* em c.

Usa-se o termo local porque fixamos a nossa atenção em um intervalo aberto suficientemente pequeno contendo c tal que f tome seu maior (ou menor) valor em c. Fora deste intervalo aberto, f pode assunir valores maiores (ou menores).

Às vezes usa-se o termo *relativo* em vez de local.

Exemplos:1) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$

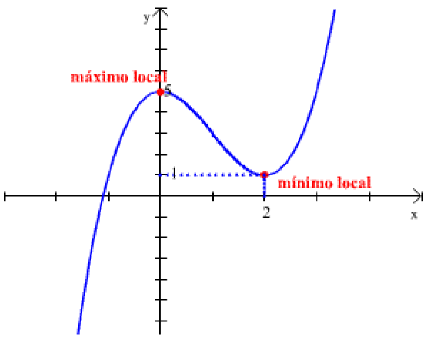


Figura 1

2)

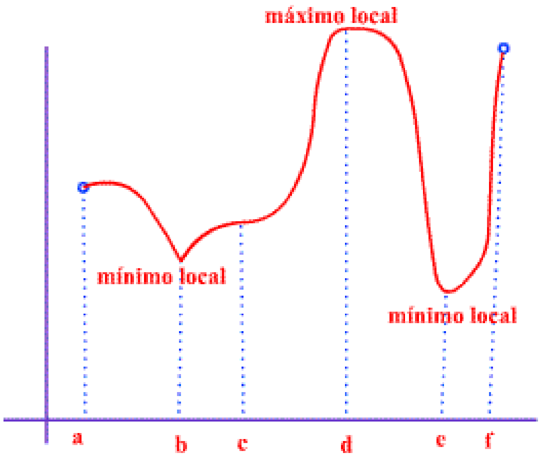


Figura 2

Condição necessária para extremos locais (Teorema de Fermat)

Seja f uma função definida em um intervalo]a,b[e $c \in$]a,b[. Se f tem um extremo local em c e existe f´(c) então f´(c) = 0.

D] Supondo que f tem um máximo local em c, então existe um intervalo aberto I, $c \in I$;

$$f(c) \geq f(x),\ \forall\ x \in I \cap\ ]a,b[\ \Rightarrow f(x) - f(c) \leq 0,\ \forall\ x \in I \cap\ ]a,b[.$$

Por hipótese, existe f´(c), logo

$$f'(c) = \lim_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = \lim_{x\to c^+} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = \lim_{x\to c^-} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$$

Daí,

$$x \to c^+ \Rightarrow x > c \Rightarrow x - c > 0 \Rightarrow \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0 \Rightarrow f'(c) \leq 0 \quad \text{(I)}$$

$$x \to c^- \Rightarrow x < c \Rightarrow x - c < 0 \Rightarrow \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0 \Rightarrow f'(c) \geq 0 \quad \text{(II)}$$

De (I) e (II) segue que $f'(c) = 0$

Se f tem um mínimo local em c a demonstração é análoga.

Observações:

1) Se f tem um extremo local em c e existe $f'(c)$ então, pelo teorema de Fermat, o gráfico de f tem uma tangente horizontal em (c,f(c)).

2) Se $f'(c) = 0$ então f pode ter ou não um extremo local em c.

Considere f(x) = x^3, f´(x) = $3x^2$ logo, f´(0) = 0. Mas, f não tem um extremo local em x = 0 (ver figura 3).

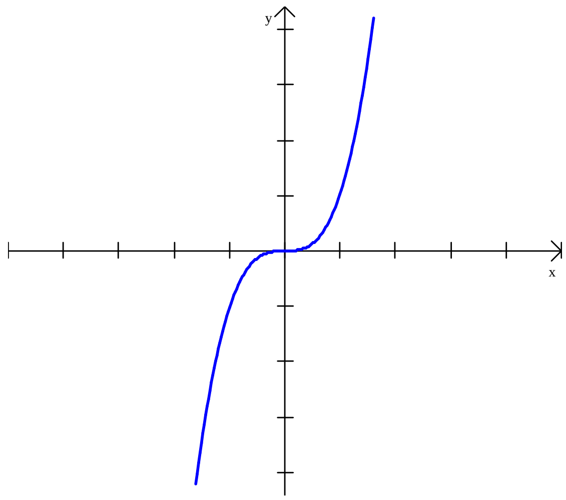


Figura 3

3) Se não existe $f'(c)$ então f pode ter ou não um extremo local em x = c.

Exemplo1: f(x) = |x| . Não existe f´(0) e f tem um mínimo em x = 0 (ver figura 4)

Exemplo 2: $f(x) = \begin{cases} 2x, & x \leq 1 \\ 4x - 2, & x > 1 \end{cases}$. Não existe f´(1) e f não possui extremo em x = 1(ver figura 5)

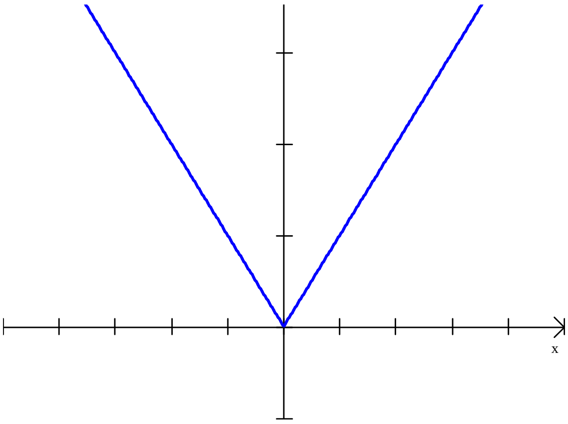


Figura 4

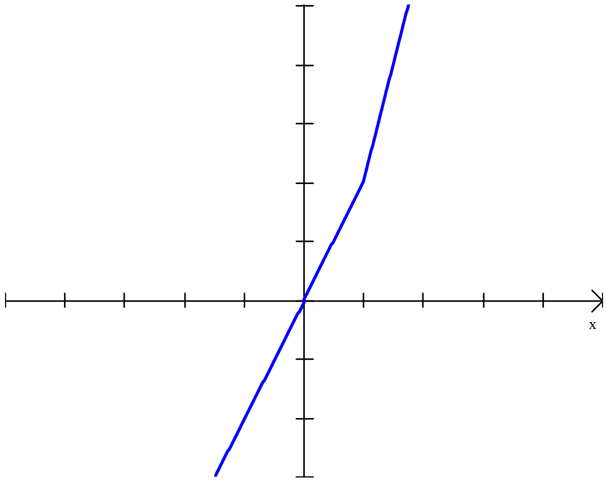


Figura 5

Definição: Dada uma função f definida em um intervalo [a,b] e seja $c \in]a,b[$, dizemos que c é um *número crítico* ou *ponto crítico* para f quando $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existe.

Os pontos críticos são “candidatos” a pontos nos quais f tem extremo local; entretanto, cada ponto crítico deve ser testado para verificar se é ou não extremo local de f.

Máximos e Mínimos Absolutos

Definição: Dado $c \in D(f)$, dizemos que f possui:

i) *máximo absoluto ou global* em c se e somente se $f(c) \geq f(x)$ para todo $x \in D(f)$,

ii) mínimo absoluto ou global em c se e somente se $f(c) \leq f(x)$ para todo $x \in D(f)$.

Exemplo1:

Considere $f(x) = 1 - x^2$ em R.

i) $f(0) = 1 \geq f(x)$ para todo x em R, f possui máximo absoluto em x = 0.

ii) f não possui mínimo absoluto em R

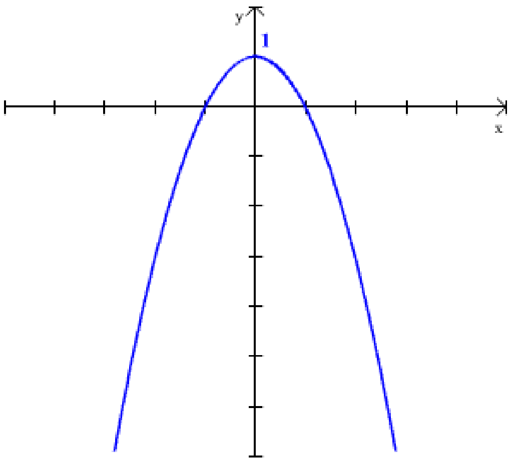


Figura 6

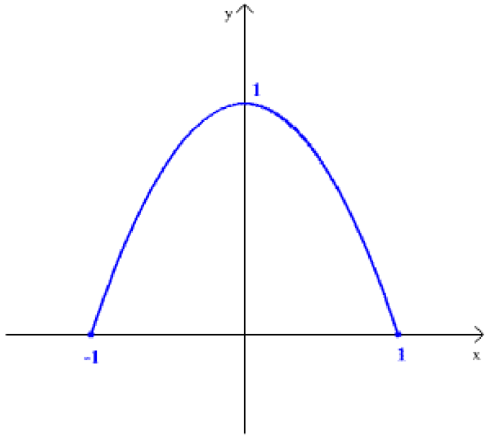
Exemplo2 Considere $f(x) = 1 - x^2$ no intervalo [-1,1] i) $f(0) = 1 \geq f(x)$ para todo x em [-1,1], f possui máximo absoluto em x = 0. ii) f possui mínimo absoluto em x = -1 e x =1	

Figura 7

O resultado a seguir garante a existência de extremos absolutos para funções contínuas definidas em um intervalo fechado.

Teorema de Weierstrass ou Teorema do Valor Extremo

Se f é uma função contínua em um intervalo [a,b], então f assume o seu valor máximo (e também o seu valor mínimo) em algum ponto de [a,b]. Isto é, existem números reais x_1 e x_2 em [a,b] tal que para todo x em [a,b] temos: $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$.

Para determinar extremos absolutos de uma função contínua em intervalo fechado [a,b], devemos seguir o seguinte roteiro:

1) Ache todos os pontos críticos c para função f no intervalo aberto]a,b[.
2) Calcule f(c) para cada ponto crítico c obtido no item 1).
3) Calcule f(a) e f(b)
4) O maior dos valores dos itens 2) e 3) é o valor máximo absoluto, e o menor dos valores dos itens 2) e 3) é o valor mínimo absoluto.

Exemplo 1**:** Dada a função $f(x) = x^3 + x^2 - x + 1$, encontre os extremos absolutos de f em [-2, $\frac{1}{2}$].

Solução:

Seguindo roteiro dado

1) $f'(x) = 3x^2 + 2x - 1$, f '(x) existe para todos os números reais, assim os pontos críticos de serão os valores de x para os quais f '(x) = 0. Devemos considerar os pontos críticos em]-2, $\frac{1}{2}$[. Tomando

$f'(x) = 0$ temos: $3x^2 + 2x - 1 = 0 \Rightarrow (3x - 1)(x + 1) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$ ou $x = -1 \in]-2, \frac{1}{2}[$.

2) $f(-1) = 2$ e $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{22}{27}$

3) $f(-2) = -1$ e $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{8}$

4) O valor máximo absoluto de f em $[-2, \frac{1}{2}]$ é 2, que ocorre em –1, e o valor mínimo absoluto de f em $[-2, \frac{1}{2}]$ é -1, que ocorre no extremo esquerdo –2. A figura 8 mostra um esboço do gráfico desta função.

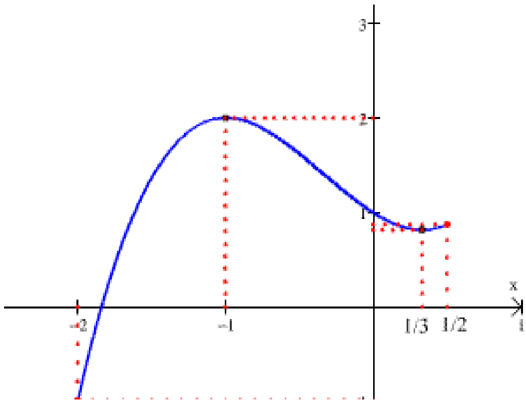


Figura 8

Seja f definida em [a, b] e $c \in]a,b[$, podemos observar nos exemplos anteriores que se f tem um extremo local em c então, em uma vizinhança de c, ou f é crescente para $x < c$ e decrescente para $x > c$ ou f decrescente para $x < c$ e crescente para $x > c$. Portanto, para verificar se f tem um extremo local em c devemos estudar o crescimento e decrescimento de f em uma vizinhança de c.

Demonstraremos a seguir dois teoremas que servirão de base para relacionar o sinal da derivada com o crescimento e decrescimento de funções.

Teorema Rolle

Se f é uma função contínua em [a,b], derivável em]a,b[e f(a) = f(b) então existe $c \in]a,b[$ tal que $f'(c) = 0$.

D] Se f é a função constante em[a,b], então $f'(x) = 0$ em]a,b[; logo existe $c \in]a,b[$ tal que $f'(c) = 0$.

Supondo que f não é a função constante em [a,b]. Como f é contínua em [a,b], pelo Teorema do Valor Extremo existem x_1 e $x_2 \in$ [a,b] tal que $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ para todo x em [a,b].

Como f não é constante em [a,b] temos que $f(x_1) \neq f(x_2)$; segue então que x_1 ou $x_2 \in$]a,b[(lembre-se que f(a) = f(b)). Logo, pelo Teorema de Fermat temos que $f´(x_1) = 0$ ou $f´(x_2) = 0$. Portanto, existe $c \in$]a,b[tal que f´(c) = 0.

Obs: Interpretação geométrica

Se f é uma função contínua em [a,b], derivável em]a,b[e f(a) = f(b) então, de acordo como Teorema de Rolle, existe $c \in$]a,b[tal que a reta tangente ao gráfico de f no ponto (c,f(c)) é horizontal. (ver figura 9)

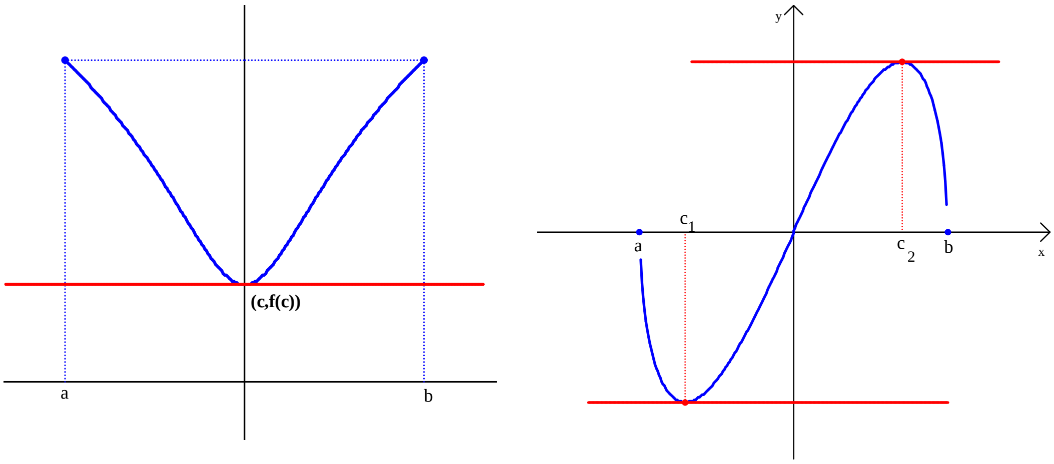


Figura 9

OBS: Aplicando o Teorema de Rolle a função de posição s = f(t) de um corpo que se move em linha reta. Se o objeto estiver no mesmo lugar em dois instantes diferentes t = a e t = b, então f(a) = f(b). O teorema de Rolle afirma que existe algum instante t = c entre a e b onde f´(c) = 0; isto é, a velocidade é zero. Em particular, você pode ver que esta afirmação é verdadeira quando uma bola é atirada diretamente para cima.

Teorema do Valor Médio - Teorema de Lagrange

Se f é uma função contínua em [a,b] e derivável em]a,b[então existe $c \in$]a,b[tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

D] Considere os dois casos:

1) f(a) = f(b)

f(a) = f(b) $\Rightarrow$ $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$

f(a) = f(b) $\Rightarrow$ existe c$\in$]a,b[tal que f´(c) = 0 (Teorema de Rolle)

Logo, $f'(c) = 0 = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

2) f(a)$\neq$ f(b)

Considere a função $g(x) = f(x) - f(a) - \left(\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a)}\right)(x-a)$.

(Observe que a função g determina a distância vertical entre um ponto (x,f(x)) do gráfico e o ponto corresponde na reta que passa pelos pontos (a,f(a)) e (b,f(b)))

A função g satisfaz as hipóteses do Teorema de Rolle logo, existe c$\in$]a,b[tal que g´(c) = 0, ou seja, $g'(c) = f'(c) - \left(\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a)}\right) = 0$. Daí $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Obs: Interpretação geométrica

Se f é uma função contínua em [a,b] e derivável em]a,b[então, de acordo como Teorema do Valor Médio, existe c$\in$]a,b[tal que a reta tangente ao gráfico de f no ponto (c,f(c)) é paralela a reta que passa pelos pontos (a,f(a)) e (b,f(b)). (ver figura10)

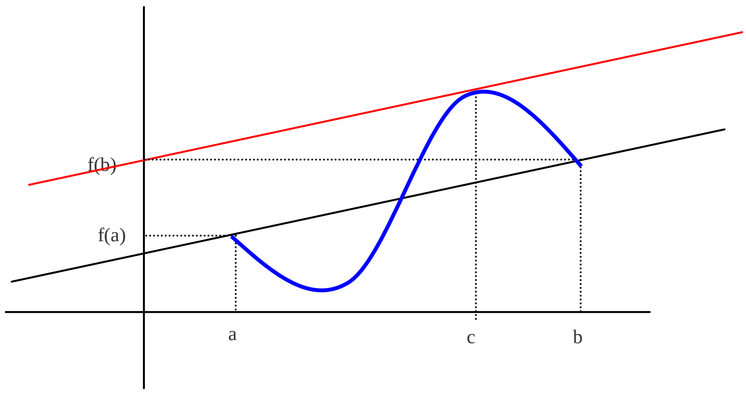
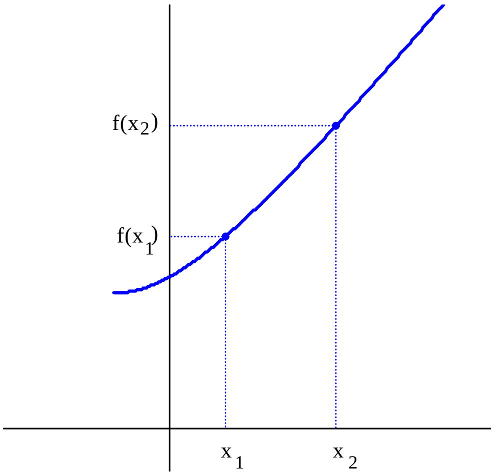


Figura 10

OBS: Se um objeto se move em linha reta com uma função de posição s = f(t), então a velocidade média entre t = a e t = b é $v_m = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Assim, de acordo com o teorema do valor médio em algum instante t = c entre a e b a velocidade instantânea é igual a velocidade média, isto é, $f'(c) = v_m = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Funções crescentes e decrescentes

f é *crescente* no intervalo I se e somente se $\forall x_1, x_2 \in I, \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$	f é *decrescente* no intervalo I se e somente se $\forall x_1, x_2 \in I, \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$



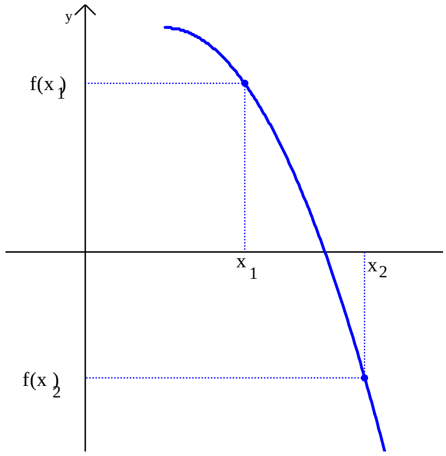


Figura 11

OBS: A função f é dita *monótona* no intervalo I se for crescente ou decrescente em I.

Critério da derivada para crescimento e decrescimento.

Considere que a função f contínua [a,b] e derivável em]a,b[, temos que

i) Se f '(x) $\ge$ 0 para todo x em]a,b[então f é crescente em [a,b].

ii) Se f '(x) $\le$ 0 para todo x em]a,b[então f é decrescente em [a,b].

D] i) f '(x) $\ge$ 0 para todo x em]a,b[. Dados x_1 e $x_2 \in$ [a,b], com $x_1 < x_2$, o teorema do valor médio aplicado ao intervalo [x_1, x_2], nos garante que existe c $\in$] x_1, x_2[tal que, $f'(c) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

E como, f '(c) $\ge$ 0 e $x_1 < x_2$. Temos que $f(x_1) \le f(x_2)$, ou seja, f é crescente em[a,b].

A demonstração do item ii) é análoga.

Exemplo 1: Estude, quanto ao crescimento e decrescimento, a função f, em cada caso

a) f(x) = $x^3 - 2x^2 + x + 2$ b) f(x) = $\dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2}$ c) $f(x) = \dfrac{x}{2\ln x}$

Solução:

a) f ' x) = $3x^2 - 4x + 1 = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)(x-1)$

f ' (x) > 0 em]-∞, 1/3[e em]1, +∞[, logo f é crescente em (-∞,1/3] e em [1,+ ∞[

f '(x) < 0 em]1/3,1[, logo f é decrescente em [1/3,1].

b) D(f) = R^*, f´(x) = $\dfrac{4x^2 - 6x}{x^4} = \dfrac{4x\left(x - \frac{3}{2}\right)}{x^4}$

- f ' (x) > 0 em]-∞, 0[e em]3/2, +∞ [,

  logo, f é crescente em]-∞, 0[e em [3/2, +∞ [,

- f ' (x) < 0 em]0, 3/2[, logo f é decrescente em]0, 3/2].

c) D(f) = $R_+^* - \{1\}$, $f'(x) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\ln(x) - 1}{(\ln x)^2}\right)$

Observe que:

i) $(\ln x)^2 > 0$, $\forall x \in R_+^* - \{1\}$,

ii) $(\ln(x) - 1) \geq 0 \Rightarrow \ln x \geq 1 \Rightarrow x \geq e$ e $(\ln(x) - 1) \leq 0 \Rightarrow \ln x \leq 1 \Rightarrow 0 < x \leq e$.

✓ f ' (x) > 0 em]*e*, +∞[⇒ f é crescente em [*e*, +∞[,

✓ f ' (x) < 0 em]0,1[e]1,*e* [⇒ f é decrescente]0,1[e em [1,*e*].

Teste da derivada primeira para extremos locais

Seja f contínua em um intervalo [a,b], f é derivável em]a,b[exceto talvez em c $\in$]a,b[e c um ponto crítico de f.

1) Se f '(x) $\geq$ 0 para todo x < c e f '(x) $\leq$ 0 para todo x > c (x $\in$]a,b[ ) então c é um ponto *de máximo local*.

2) Se f '(x) $\leq$ 0 para todo x < c e f '(x) $\geq$ 0 para todo x > c (x $\in$]a,b[) então c é um ponto *de mínimo local*.

D] 1) f '(x) $\geq$ 0 para todo x < c $\Rightarrow$ f é crescente em [a,c] $\Rightarrow$ f(x) $\leq$ f(c), $\forall x \in [a, c]$ (I)

f '(x) $\leq$ 0 para todo x > c $\Rightarrow$ f é decrescente em [c,b] $\Rightarrow$ f(c) $\geq$ f(x), $\forall x \in [c, b]$ (II)

De (I) e (II) temos que f tem um máximo local em x = c.

A demonstração do item 2) é análoga.

OBS: Se f ´ não muda de sinal em uma vizinhança de um ponto crítico c então f não tem extremo local em c.

Exemplo 1**:** Use o teste para derivada primeira para determinar os extremos locais das funções

a) f(x) = x^3 -2x^2 + x + 2 b) f(x) = $\dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2}$ c) f(x) = $\begin{cases} x^2 - 1, & \text{se } x \geq 1 \\ 1 - x^2, & \text{se } x < 1 \end{cases}$ d) $f(x) = \dfrac{x}{2\ln x}$

Solução:

a)

1) Determinar os pontos críticos de f.

f '(x) = 3x^2 - 4x + 1 = $3\left(x - \frac{1}{3}\right)(x - 1)$, f '(x) existe para todos os números reais, assim os pontos críticos de f serão os valores de x para os quais f '(x) = 0. Tomando f '(x) = 0 temos:

f '(x) = $3\left(x - \frac{1}{3}\right)(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$ ou x =1

2) Analisar o sinal da derivada em uma vizinhança de x = - 5/3 e x = 1

Intervalos	]-∞,1/3[	]1/3,1[	]1,+∞[
Sinal de f	f '(x) > 0	f '(x) < 0	f '(x) > 0

Conclusão: f tem um máximo local em x = 1/3, e um mínimo local em x = 1

b)

1)Determinar os pontos críticos de f.

D(f) = R^{*}, $f'(x) = \dfrac{4x^2 - 6x}{x^4} = \dfrac{4x\left(x - \frac{3}{2}\right)}{x^4} = 0 \Rightarrow x = 3/2 \ \ (0 \notin D(f))$.

2) Analisar o sinal da derivada em uma vizinhança de x = 3/2

Intervalos	]-∞,0[	]0,3/2[	]3/2,+∞[
Sinal de f	$f'(x) > 0$	$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$

Conclusão: f tem um mínimo local em x = 3/2.

c)

1) Determinar os pontos críticos de f

$$f'(x) = \begin{cases} 2x, & \text{se } x > 1 \\ -2x, & \text{se } x < 1 \end{cases}, \quad f'(1)\ ?$$

$$f'(1^+) = \lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1 - 0}{x - 1} = \lim_{x \to 1} x + 1 = 2$$

$$f'(1^-) = \lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{1 - x^2 - 0}{x - 1} = \lim_{x \to 1} -(x + 1) = -2$$

Logo, ∄ $f'(1)$, e como $f'(0) = 0$

Os pontos críticos de f são x = 1 e x = 0

2) Analisar o sinal da derivada em uma vizinhança de x = 0 e x = 1.

Intervalos	]-∞,0[	]0,1[	]1,+∞[
Sinal de f´	$f'(x) > 0$	$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$

Conclusão: f tem um máximo local em x = 0, e um mínimo local em x = 1.

d)

1) Determinar os pontos críticos de f.

D(f) = $R_+^* - \{1\}$, $f'(x) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\ln(x) - 1}{(\ln x)^2}\right) = 0 \Rightarrow x = e$

2) Analisar o sinal da derivada em uma vizinhança de x = e.

Intervalos	$]0,1[$	$]1,e[$	$]e,+\infty[$
Sinal de f	f '(x) < 0	f '(x) < 0	f '(x) > 0

Conclusão: f tem um mínimo local em x = e.

Teste da derivada segunda para extremos locais

Seja f uma função derivável em]a,b[e c um ponto crítico de f neste intervalo, isto é, f ' (c) = 0. Se f admite derivada de 2ª ordem em]a,b[temos que.

1) Se f "(c) > 0 então f possui um *mínimo local* em c.

2) Se f "(c) < 0 então f possui um *máximo local* em c.

D] 1) $f''(c) = \lim\limits_{x \to c} \dfrac{f'(x) - f'(c)}{x - c} = \lim\limits_{x \to c} \dfrac{f'(x)}{x - c} \quad \lim\limits_{x \to c^+} \dfrac{f'(x)}{x - c} = \lim\limits_{x \to c-} \dfrac{f'(x)}{x - c}$.

$f''(c) > 0$ (por hipótese) $\Rightarrow \dfrac{f'(x)}{x - c} > 0$ em uma vizinhança de c.

Daí,

$x \to c- \Rightarrow x - c < 0 \Rightarrow f'(x) < 0$ (para $x < c$)

$x \to c+ \Rightarrow x - c > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$ (para $x > c$)

Pelo teste da derivada primeira concluímos que f tem um mínimo local em x = c.

2) De maneira análoga demonstra-se o item 2.

OBS: Se f "(c) = 0, nada podemos afirmar, usando este teste, sobre a natureza do ponto crítico. Em tais casos, devemos aplicar o teste da derivada primeira.

Exemplo 1**:** Use, se possível, o teste para derivada segunda para determinar os extremos locais das funções:

a) $f(x) = x^5 - 5x^3$

1) Determinar os pontos críticos de f.

$f'(x) = 5x^4 - 15x^2 = 5x^2(x^2 - 3)$, f '(x) existe para todos os números reais, assim os pontos críticos de f são os valores de x para os quais f '(x) = 0. Tomando f '(x) = 0 temos $5x^2(x^2 - 3) = 0 \Rightarrow$ x = 0 ou x = $-\sqrt{3}$ ou x = $\sqrt{3}$.

2) Determinar o sinal da derivada segunda para os pontos críticos.

$f''(x) = 10x(2x^2 - 3)$

f " ($\sqrt{3}$) = 10 $\sqrt{3}$ (2.3-3) > 0 $\Rightarrow$ f tem um mínimo local em x = $\sqrt{3}$.

f " ($-\sqrt{3}$) = -10 $\sqrt{3}$ (2.3-3) < 0 $\Rightarrow$ f tem um máximo local em x = $-\sqrt{3}$.

f " (0) = 0, nada podemos afirmar por este método. Vamos usar o teste da derivada primeira, analisando o sinal de f´.

Intervalos	$]-\infty, -\sqrt{3}[$	$]-\sqrt{3},0[$	$]0,\sqrt{3}[$	$]\sqrt{3},+\infty[$
Sinal de f´	f '(x) > 0	f '(x) < 0	f '(x) < 0	f '(x) > 0

Como f´ não muda de sinal em uma vizinhança de 0 então f não possui extremo local em x = 0.(ver figura 12)

b) f(x) = x^4

1) Determinar os pontos críticos de f.

f '(x) = $4x^3$, f '(x) existe para todos os números reais, assim os pontos críticos de f são os valores de x para os quais f '(x) = 0. Tomando f '(x) = 0 temos x = 0

2) Determinar o sinal da derivada segunda para os pontos críticos.

f "(x) = $12x^2$, f " (0) = 0, nada podemos afirmar por este método. Vamos usar o teste da derivada primeira, analisando o sinal de f´.

Intervalos	$]-\infty,0[$	$]0,+\infty[$
Sinal de f´	f '(x) < 0	f '(x) > 0

Logo, f tem um mínimo local em x = 0. (ver figura 13)

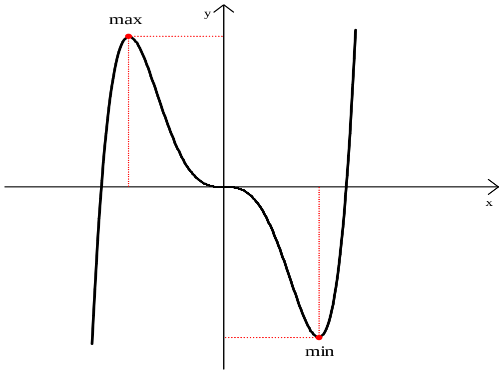


Figura 12

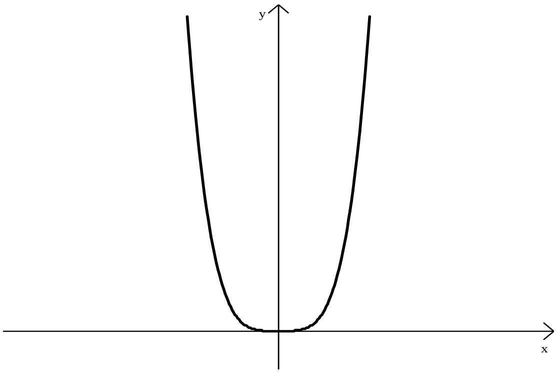


Figura 13

Concavidade do gráfico de uma função

Na figura 14, observe que quando um ponto do gráfico de f move-se para direita, a reta tangente ao gráfico de f neste ponto gira no sentido anti-horário e sua inclinação aumenta. Dizemos que este gráfico possui a *concavidade voltada para cima*. Analogamente, na figura 15, quando um ponto do gráfico de f move-se para direita, a reta tangente gira no sentido horário e sua inclinação decresce. Dizemos que tal gráfico possui a *concavidade voltada para baixo*. Estas considerações geométricas nos conduzem às seguintes definições.

Concavidade voltada para cima

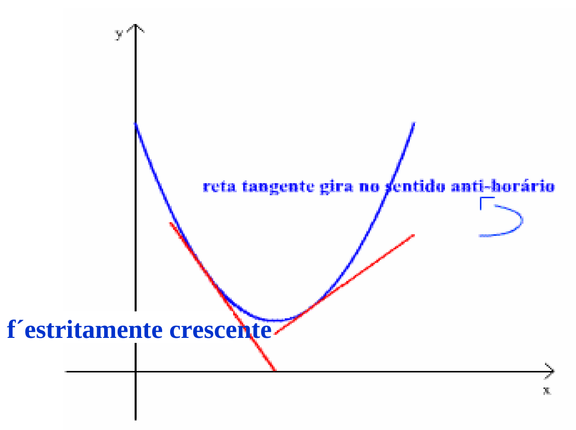


Figura 14

Concavidade voltada para baixo

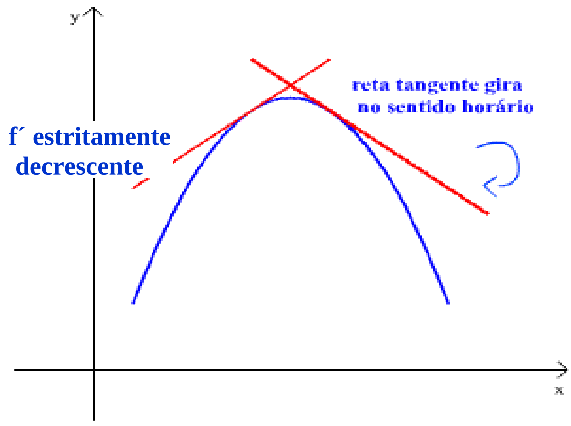


Figura 15

Definição: Seja f uma função derivável em um intervalo]a,b[

i) O gráfico de f tem *concavidade para cima* (C.V.C) em]a,b[se e somente se f ' for uma função estritamente crescente em]a,b[.

ii) O gráfico de f tem *concavidade para baixo* (C.V.B) em]a,b[se, e somente se f ' for uma função estritamente decrescente em]a,b[.

Definição: Um ponto (c,f(c)) do gráfico de uma função contínua f é chamado de *ponto de inflexão*, se e somente se existe um intervalo aberto]a,b[$\subset$ D(f), contendo c, tal que f tenha concavidades de nomes contrários em]a,c[e em]c,b[.

Aplicando a função f´ o critério da derivada para crescimento e decrescimento, obtemos o seguinte resultado.

Teste para concavidade de um gráfico

Considere a função f que admite derivada segunda no intervalo]a,b[.

i) Se f "(x) > 0 para todo x em a,b[, então o gráfico de f possui concavidade para cima em]a,b[.

ii) Se f "(x) < 0 para todo x em a,b[, então o gráfico de f possui concavidade para baixo em]a,b[.

Exemplo 1: Estude as funções a seguir em relação a concavidade.

a) $f(x) = x^3 + x^2 - 5x - 1$ b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2}$

Solução:

a) $f'(x) = 3x^2 + 2x - 5$, $f''(x) = 6x + 2$

Assim, $f''(x) < 0$, se $x < -\dfrac{1}{3}$ e $f''(x) > 0$, se $x > -\dfrac{1}{3}$.

Logo, o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo no intervalo $\left]-\infty, -\dfrac{1}{3}\right[$ e concavidade voltada para cima no intervalo $\left]-\dfrac{1}{3}, +\infty\right[$.

Como o gráfico de f muda de concavidade na vizinhança de $-\dfrac{1}{3}$ então $P = \left(-\dfrac{1}{3}, f(-\dfrac{1}{3})\right) = \left(-\dfrac{1}{3}, \dfrac{20}{27}\right)$ é o ponto de inflexão do gráfico de f.

$D(f) = R^{*}$, $f'(x) = \dfrac{4x^2 - 6x}{x^4}$, $f''(x) = \dfrac{-8x + 18}{x^4}$

$f''(x) > 0$ em $]-\infty, 0[$ e $]0, 9/4[$ e $f''(x) < 0$ em $]9/4, +\infty[$.

Logo, o gráfico de f tem concavidade voltada para cima em $]-\infty, 0[$ e em $]0, 9/4[$ e tem concavidade voltada para baixo em em $]9/4, +\infty[$.

Como o gráfico de f muda de concavidade na vizinhança de $\dfrac{9}{4}$ então $P = \left(\dfrac{9}{4}, f(\dfrac{9}{4})\right)$ é o ponto de inflexão do gráfico de f..

Assíntotas

Definição: Dada uma reta r e uma função f, dizemos que a reta r é uma *assíntota do gráfico de f* se e somente se a distância δ entre um ponto M do gráfico de f e a reta r tende a zero à medida que o ponto M se afasta indefinidamente da origem.

As assíntotas podem ser:

a) Verticais (figura 16)

b) oblíquas (figura 17((caso particular: horizontais – figura 18)

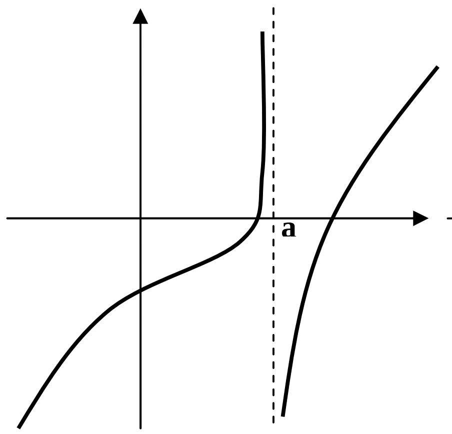


Figura 16

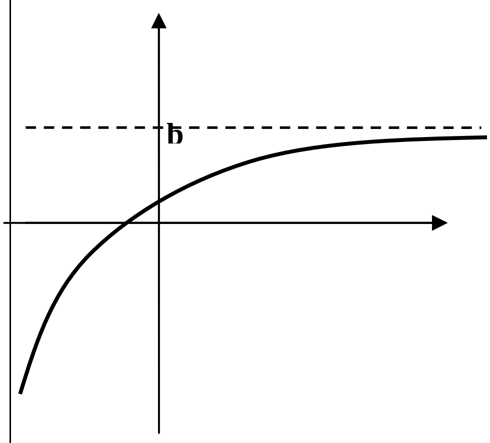


Figura 17

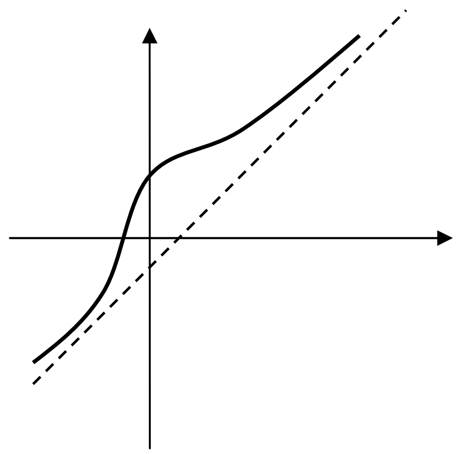


Figura 18

Definição: A reta x = a é uma assíntota vertical do gráfico de y = f(x) se, e somente se, pelo menos uma das alternativas for verdadeira:

1) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty$ 2) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$ 3) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = +\infty$ 4) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty$

Exemplos:

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2}$; D(f) = R*

$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2} = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2} = +\infty \Rightarrow$ x = 0 é uma assíntota vertical do gráfico de f.

b) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$; D(f) = R – {-1, 1}

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^3}{x^2-1} = +\infty,\quad \lim_{x\to 1^-} \frac{x^3}{x^2-1} = -\infty,\quad \lim_{x\to -1^+} \frac{x^3}{x^2-1} = +\infty \text{ e } \lim_{x\to -1^-} \frac{x^3}{x^2-1} = -\infty.$$

Logo, as retas x = 1 e x = - 1 são assíntotas verticais do gráfico de f.

Obs: As "possíveis" assíntotas verticais x = a do gráfico de funções do tipo f/g, são os valores para os quais g(a)= 0. Para função $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$; cujo o domínio é D(f) = R*, temos $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \dfrac{1}{2}$ e $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \dfrac{1}{2}$. Logo a reta x = 0 não é assíntota vertical do gráfico de f.

Definição: A reta y = kx + b é uma *assíntota oblíqua* do gráfico de y = f(x) se, e somente se, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[f(x)-(kx+b)\right] = 0$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty} \left[f(x)-(kx+b)\right] = 0$

Obs A reta y = b é uma *assíntota horizontal* do gráfico de y = f(x) se, e somente se, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[f(x)-b)\right] = 0$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty} \left[f(x)-b\right] = 0$, isto é, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$.

Determinação da assíntota oblíqua:

y = kx + b é uma assíntota oblíqua do gráfico de y = f(x) $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \left[f(x)-kx-b\right] = 0$ (I) $\Leftrightarrow$

$$\lim_{x\to+\infty} x\left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x}\right] = 0.$$

Segue então que $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[\dfrac{f(x)}{x} - k - \dfrac{b}{x}\right] = 0$, pois se $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[\dfrac{f(x)}{x} - k - \dfrac{b}{x}\right] \neq 0$ teríamos que

$$\lim_{x\to+\infty} x\left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x}\right] = \begin{cases} +\infty \\ ou \\ -\infty \end{cases}.$$

Assim,

$$\lim_{x\to+\infty} \left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x}\right] = 0 \Rightarrow k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ (II)}$$

Conhecendo-se k, de (I) temos que $b = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - kx$ (III).

Logo, se a reta y = kx + b é uma assíntota do gráfico de y = f(x) obtemos k e b pelas fórmulas (II) e (III) respectivamente. Reciprocamente, se os limites (II) e (III) existem e são finitos a igualdade (I) se verifica e a reta y = kx + b é uma assíntota oblíqua do gráfico de f.

Observações:

1) Analogamente para $x \to -\infty$.

2) Se k = 0 e $b = \lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)$ então a reta y = b é uma assíntota é horizontal do gráfico de f.

3) O gráfico de uma função y = f(x) tem no máximo duas assíntotas oblíquas (ou horizontais).

Exemplos:

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2}$;

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2}}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^3} = 0 \quad \text{e} \quad b = \lim_{x \to \pm} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 = 1}.$$

Logo, a reta y = 1 é uma assíntota horizontal do gráfico de f.

b) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\dfrac{x^3}{x^2 - 1}}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3}{x(x^2 - 1)} = 1 \quad \text{e} \quad b = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3}{x^2 - 1} - x = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3 - x^3 + 1}{x^2 - 1} = 0.$$

Logo, a reta y = x é uma assíntota oblíqua do gráfico de f.

c) $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 5}$, D(f) = R

$$k_1 = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 5}}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x\left(\sqrt{1 + \dfrac{2}{x} + \dfrac{5}{x^2}}\right)}{x} = 1$$

$$b_1 = \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x + 5}) - x\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 2x + 5 - x^2}{\sqrt{x^2 + 2x + 5} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x\left(2 + \dfrac{5}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1 + \dfrac{2}{x} + \dfrac{5}{x^2}} + 1\right)} = 1$$

$$k_2 = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 5}}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-x\left(\sqrt{1 + \dfrac{2}{x} + \dfrac{5}{x^2}}\right)}{x} = -1$$

$$b_2 = \lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x + 5)} - x \right) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 + 2x + 5 - x^2}{\sqrt{x^2 + 2x + 5} + x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x\left(2 + \frac{5}{x}\right)}{-x\left(\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}} + 1\right)} = -1$$

Logo, as retas y = x + 1 e y = – x – 1 são assíntotas do gráfico de f.

Gráficos

Para o esboço do gráfico de uma função f, sugerimos o seguinte roteiro:

Determinar (se possível)

a) o domínio e interseção com os eixos,
b) assíntotas do gráfico de f e interseções com as assíntotas
c) intervalos de crescimento e decrescimento,
d) extremos locais,
e) intervalos onde o gráfico de f tem concavidade para cima e para baixo,
f) pontos de inflexão.

BIBLIOGRAFIA

Guidorizzi, Hamilton – *Um Curso de Cálculo, vol 1* –Livros Técnicos e Científicos Editora S.A.

Munen, Mustafá – Foulis,David – *Cálculo , vol 1* – Editora Guanabara Dois.

Leithold, Louis – *Cálculo com Geometria Analítica*, vol 1, 2ª Edição – Editora HARBRA ltda.

Piskounov, N. – Cálculo Diferencial e Integral I, vol 1, Editora Lopes da Silva.

Steinbruch, Alfredo-Winterle, Paulo - *Geometria Analítica* – 2ª Edição - Editora Makron Books

Swookowski, Earl – *Cálculo com Geometria Analítica* – vol 1, 2ª Edição - Editora Makron Books